LOGICA Y TEORIA DE LA CIENCIA

LOGICA PARA LINGÜISTAS

Jens Allwood
Lars-Gunnar Andersson
Östen Dahl

PARANINFO S.A.

LOGICA
PARA LINGÜISTAS

JENS ALLWOOD
LARS-GUNNAR ANDERSSON
ÖSTEN DAHL

LOGICA PARA LINGÜISTAS

Colección
LOGICA Y TEORIA DE LA CIENCIA

Director:
PASCUAL MARTINEZ FREIRE
Profesor agregado numerario de Lógica
Universidad Complutense de Madrid

1981

PARANINFO SA

MADRID

Traducido por
JAIME SARABIA

© Cambridge University Press
© de la edición española, Paraninfo, S. A., Madrid, España,
© de la traducción española, Paraninfo, S. A., Madrid, España.

Título original:
LOGIC IN LINGUISTICS

Reservados los derechos de edición,
reproducción o adaptación.

IMPRESO EN ESPAÑA
PRINTED IN SPAIN

ISBN: 0 521 29174 7 (edición inglesa)
ISBN: 84 283 1126-9 (edición española)

Depósito Legal: Z. 739-81.

PARANINFO SA Magallanes, 25 - Madrid (15) (3-2841)

Cometa, S. A. — Carretera Castellón, km. 3'400 — Zaragoza

Indice de materias

Prefacio ... 8

Símbolos y convenciones notacionales ... 9

1. **Lógica para lingüistas** ... 11

2. **Teoría de conjuntos** ... 13

   2.1. Conjuntos y elementos ... 13
   2.2. Relaciones entre conjuntos ... 16
   2.3. Operaciones con conjuntos ... 17
   2.4. Relaciones y funciones ... 20

3. **Inferencia y análisis lógico de los enunciados** ... 26

   3.1. Inferencia ... 26
   3.2. Forma lógica ... 29
   3.3. Enunciados y proposiciones ... 31
   3.4. Mundos posibles y conjunto-verdad de una proposición. 33
   3.5. Enunciados analíticos y sintéticos ... 34
   3.6. Enunciados simples y compuestos ... 36
   3.7. El alcance del análisis lógico ... 37

4. **Lógica de enunciados** ... 38

   4.1. Conectivas ... 38
   4.2. El significado de las conectivas lógicas ... 42
      4.2.1. Negación ... 42
      4.2.2. Conjunción ... 44

4.2.3. Disyunción ... 46
4.2.4. Implicación ... 49
4.2.5. Equivalencia ... 52
4.3. Cómo señalar la estructura constitutiva ... 54
4.4. Sintaxis y semántica del cálculo de enunciados ... 56
4.5. Sintaxis ... 57
4.6. Semántica ... 59
4.7. Tautologías y contradicciones ... 62
4.8. Tablas de verdad ... 62

5. Lógica de predicados ... 70
5.1. Ampliación del análisis lógico ... 70
5.2. Cuantores ... 73
5.3. Resumen de la sintaxis de la lógica de predicados ... 82
5.4. Semántica de la lógica de predicados ... 84
5.5. Verdadero en toda interpretación ... 89
5.6. Resumen de la semántica de la lógica de predicados ... 95
5.7. Una versión formal de la semántica ... 96
5.8. Propiedades formales de las relaciones ... 101
5.8.1. Reflexividad ... 101
5.8.2. Simetría ... 101
5.8.3. Transitividad ... 102
5.8.4. Conversa ... 103
5.8.5. Estructura del dominio y codominio de las relaciones ... 103

6. Deducción ... 109
6.1. El sistema deductivo ... 109
6.2. Reglas de deducción en la conversación cotidiana ... 117

7. Lógica modal ... 121
7.1. Operadores modales ... 121
7.2. Implicación estricta ... 123
7.3. Otras modalidades ... 124
7.4. Problemas relacionados con el alcance y la identidad en la lógica modal ... 127
7.4.1. Ambigüedades 'de dicto' - 'de re' ... 127
7.4.2. Especificidad ... 129
7.4.3. Opacidad ... 130
7.4.4. Identificación mundo-a-través ... 132
7.5. Enunciados contrafácticos ... 133
7.6. Lógica temporal y puntos de referencia ... 134

8. Lógica intensional y gramática categorial 139

8.1. Intensiones y extensiones 139
8.2. Intensión 142
8.3. El principio de Frege 145
8.4. El principio fregeano y la gramática categorial 146
8.5. Categorías, intensiones y tipos 151

9. Otras extensiones 162

9.1. Lógica de predicados de segundo orden y operadores de predicado 162
9.2. Presuposición y descripciones definidas 163
9.3. Análisis pragmático de las presuposiciones 167
9.4. El operador de abstracción u operador lamda 170

10. ¿Lógica para lingüistas? 172

10.1. Generalidades 172
10.2. El concepto de significado 173
10.3. El papel de los lenguajes formales en el análisis del lenguaje natural 178
10.4. Las limitaciones de la lógica clásica 183

Solución de los ejercicios 187

Referencias 195

Indice alfabético 199

Prefacio

Este libro ha tenido su origen en una introducción a la lógica para lingüistas, en sueco, publicado por Studentenlitteratur, Lund, 1971, cuya traducción al alemán apareció en 1973 (Niemeyer Verlag). Se han revisado todos los capítulos del libro sueco y se han hecho varias adiciones (que incluyen el capítulo 8 entero). La meta continúa siendo la misma: Ofrecer a lingüistas y personas interesadas en temas del lenguaje un acercamiento a la lógica que les permita entender cómo se usan (o pueden usarse) los conceptos lógicos en la teoría lingüística y, en concreto, en semántica.

Nos hemos beneficiado de las sugestiones y críticas de varias personas. Quisiéramos dar las gracias, aparte de a varias generaciones de estudiantes del Departamento de Lingüística de Göteborg, que se vieron obligados a actuar como cobayas nuestros, a Claes Åberg, que leyó el libro manuscrito en diferentes etapas de su desarrollo, a Michael Grabski, que tradujo el libro sueco al alemán y que sugirió una serie de cambios, muchos de los cuales se han incorporado en esta versión y a John Lyons, editor de esta colección. Quede también constancia de nuestro agradecimiento a Peter Hinst, con cuya devastadora recensión de la versión alemana en *Zeitschrift für Germanistische Linguistik,* 3:3 (1975) estamos, en parte, de acuerdo. Si no fuera por nuestra obstinación, todos ellos habrían conseguido ejercer una influencia aún más favorable en el libro. Queremos dar las gracias, por su amable ayuda en la mecanografía y en cuestiones editoriales a Pierre Javanaud, Ann-Mari Ranstrand y al equipo de Cambridge University Press.

Aunque el libro es el resultado de un trabajo de equipo, la responsabilidad principal de los diversos capítulos corresponde a los siguientes: capítulos 1, 3, 4, 8 y 9.3, Jens Allwood; capítulos 5 y 6, Lars Gunnar Anderson, y capítulos 2, 7, 10 y el resto del capítulo 9 a Osten Dahl.

Símbolos y convenciones notacionales

Símbolo	*Nombre*	*Explicado en página*
$\in$	elemento ('es un miembro de')	14
$\notin$	'no es elemento de'	14
$\{\}$	llaves (denotan conjuntos)	14
$\varnothing$	conjunto vacío	14
1	conjunto universal	15
$\subset$	inclusión propia ('es un subconjunto propio de')	16
$\subseteq$	inclusión ('es un subconjunto')	16
$=$	identidad de conjuntos	16
$\cap$	intersección	17
$\cup$	unión	17
$-$	diferencia	18
C	complemento	19
$\langle\rangle$	paréntesis en ángulo	20
t	'verdadero'	40
f	'falso'	40
$\mid$	barra de Sheffer	41
$\sim(\neg, -)$	negación	42
$\&\,(\cdot, \wedge)$	conjunción	44
$\vee$	disyunción (inclusiva)	46
$\veebar$	disyunción (exclusiva)	47
$\rightarrow(\supset)$	implicación (material)	49
$\equiv\ (\leftrightarrow, \supseteq)$	equivalencia	53

$\forall$	cuantor universal	75
$\exists$	cuantor existencial	77
$\breve{R}$	conversa de R	103
M ($\Diamond$)	operador de posibilidad	122
N ($\Box$)	operador de necesidad	122
$\dashv$	implicación estricta ('arpón')	124
$\dashv\Box\rightarrow$	operador contrafáctico	134
F, H, G, A	operadores temporales	135
ι	operador iota	166
λ	operador lamda	170
A, B, C...	(en teoría de conjuntos) conjuntos	13
	(en lógica de predicados) constantes de predicado	71
a, b, c...	(en teoría de conjuntos) elementos de los conjuntos	13
	(en lógica de predicados) constantes de individuo	71
$\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$...	conjuntos de conjuntos	17
f, g, h...	funciones	22
p, q, r...	variables de enunciados	39
x, y, z...	variables de individuo	71
Φ, Ψ, X...	variables de predicado	71
α, β, γ...	metavariables para e.b.f.	83
P, Q, R...	metavariables para términos de predicado	83
t_1, t_2...t_n	metavariables para términos de individuos	83

Las expresiones en castellano y en otros lenguajes naturales se citan en cursiva, por ejemplo *caballo,* cuando la expresión hace referencia a sí misma, y entre comillas, por ejemplo, 'caballo' cuando la expresión se refiere al significado de la expresión.

Cuando se introduce un término de importancia, se da en negrita, por ejemplo, **extensión.**

1

Lógica para lingüistas

La mayoría de los lingüistas del siglo XX han considerado los aspectos estructurales del lenguaje como el tema fundamental de su estudio. Esto es válido no sólo para los lingüistas considerados habitualmente como estructuralistas (v. gr.: Saussure, Hjelmslev, Bloomfield y la escuela de Praga), sino también, y quizá con más razón, para Chomsky y la escuela generativo-transformacional que han realizado importantes hallazgos en el estudio formal de la estructura lingüística [1]. Sin embargo, los mayores éxitos del estructuralismo se han producido en el campo de la fonología, la morfología y la sintaxis. En lo que toca a la estructura formal del contenido o significado, los avances unánimemente aceptados son, empero, mucho menores. De hecho, muchos estructuralistas han decidido dejar de lado el contenido hasta el punto de negar que la semántica sea una parte de la lingüística.

Así, nos encontramos con que algunos de los más interesantes intentos de caracterizar la estructura del contenido y las estructuras en general no se encuentran en la lingüística estrictamente considerada, sino en la lógica formal. Aunque la lógica de nuestro siglo se ha concentrado en la lógica de las matemáticas y del lenguaje matemático, también ha sido analizado el lenguaje cotidiano, aunque menos exhaustivamente, por obra de lógicos como Frege, Russell, Carnap, Reichenbach y Montague [2]. En la actualidad tanto lingüistas como lógicos han co-

[1] Una breve presentación de la lingüística estructural se encuentra en Davies (1973).

[2] Para una historia de la lógica antigua y moderna, cfr. Kneale y Kneale (1952).

menzado a aplicar con rigor métodos lógicos al estudio del lenguaje natural, dando como resultado diferentes y muy interesantes análisis de la estructura semántica.

El propósito de esta introducción es presentar a estudiantes de lingüística y, en general, a personas interesadas en la semántica del lenguaje natural algunos de los conceptos y teorías básicas de la lógica. Un cierto conocimiento de tales conceptos y teorías se hace necesario en la actualidad para cualquiera que estudie la semántica contemporánea, o simplemente, lingüística general. Métodos que han surgido en el estudio de la semántica de los lenguajes artificiales se han aplicado provechosamente en la semántica del lenguaje natural; por otro lado, ciertos métodos y planteamientos originados en la lógica y la matemática se han convertido en habituales en lingüística. Un buen ejemplo de esto es la gramática de 'estructura de frase' ('gramática ahormacional') que Chomsky utiliza en *Syntactic Structures* (1957). Chomsky consiguió aplicar 'sistemas de reescritura' al lenguaje natural, utilizando un tipo de gramática desarrollada por el lógico americano Post para describir la estructura de ciertos lenguajes formales [3].

Queremos por tanto colaborar en la tarea de salvar la distancia entre lingüistas y lógicos y con ello fomentar una colaboración más estrecha entre unos y otros en su común estudio de la estructura del lenguaje. Si bien los aspectos pedagógicos e introductorios son los más imporantes en este libro, queremos justificar también nuestra pretensión de que la lógica es un área que merece ser estudiada por aquellos que se ocupan primordialmente del lenguaje natural: hemos de dar ejemplos de cómo el análisis lógico se puede aplicar al lenguaje natural y discutiremos la relación entre análisis lógico y lingüístico por un lado y entre lógica y lingüística por el otro. Alguna de las ideas que presentaremos son relativamente nuevas.

El libro en conjunto puede tomarse como un argumento implícito sobre la relevancia de la lógica para la lingüística. En el último capítulo hay una discusión explícita sobre esta cuestión.

[3] Post (1936).

2

Teoría de conjuntos

2.1. CONJUNTOS Y ELEMENTOS

En lo que sigue utilizaremos a menudo conceptos de la **Teoría de Conjuntos** [1]. Además de sus conexiones con la lógica, la teoría de conjuntos es fundamental en matemáticas y tiene una serie de aplicaciones en lingüística. Por todo ello, vamos a comenzar por una breve caracterización de los conceptos más importantes en este campo.

Un *conjunto* es una agrupación o colección de cosas o entidades de cualquier tipo. Otros términos que se utilizan a menudo para referirse a conjuntos son los de 'clase' y 'grupo' (aunque estos términos tienen otros usos técnicos diferentes en matemáticas). Un conjunto consiste en una serie de **elementos o miembros.** En la vida cotidiana hablamos habitualmente de conjuntos de elementos que tiene algo en común, por ejemplo hablamos de todos los suecos o del conjunto de los libros en una cierta biblioteca. La teoría de conjuntos no establece tal restricción sobre la formación de conjuntos: un conjunto puede formarse a partir de elementos entre los cuales no existe ninguna relación. Podemos por ejemplo decidir formar el conjunto consistente en el Primer Ministro sueco, el más pequeño de los satélites de Marte y la raíz cuadrada de 7.

Algunas convenciones sobre la notación: usaremos letras latinas mayúsculas (*A, B, C...*) para referirnos a conjuntos y letras latinas minúsculas (*a, b, c...*) para referirnos a los objetos singulares que son elementos

[1] Son buenas introducciones a la teoría de conjuntos, por ejemplo, Halmos (1960), Lipschutz (1964) y Stoll (1961).

de los conjuntos. Introducimos un símbolo especial, $\in$, que se lee 'es un elemento de' o bien 'es un miembro de'. Por ejemplo, 'a es un miembro de B' se escribe $a \in B$. Si queremos decir que a no es un miembro de B, escribimos $a \notin B$.

Necesitamos también una notación para escribir expresiones tales como 'el conjunto formado por las siguientes personas: Juan, Guillermo, Enrique' o 'el conjunto de los españoles pelirrojos'. Para estos casos empleamos llaves, { }. Como se trasluce de los ejemplos empleados, hay al menos dos maneras de definir conjuntos: por **enumeración** y por **descripción.** Utilizando llaves nuestros ejemplos cobrarían el siguiente aspecto:

Enumeración: {Juan, Guillermo, Enrique}
Descripción: $\{x|x$ es español pelirrojo$\}$ (léase: 'el conjunto de los x tales que x es español pelirrojo)

Existen también expresiones del lenguaje cotidiano para expresar esto. Las enumeraciones se forman habitualmente con la conjunción *y* por ejemplo: *Juan* (y) *Guillermo* y *Enrique,* y para las descripciones utilizamos oraciones de relativo, p. ej.: *los que son españoles.*

Aunque puede resultar extraño, la teoría de conjuntos permite conjuntos cuyo número de elementos es uno o cero. Para cada individuo u objeto en el mundo, hay un conjunto que tiene como único elemento ese individuo u objeto. Por ejemplo, dada una persona *a,* podemos formar el conjunto $\{a\}$. Es importante recordar que a y $\{a\}$ son cosas diferentes: a no es un conjunto.

Un conjunto con un único elemento se llama **conjunto unidad.** Un conjunto que no tiene elementos (que tiene cero elementos) se llama **conjunto vacío,** o mejor, el conjunto vacío puesto que sólo hay uno. Lo denotamos con el símbolo $\varnothing$. La razón de que sólo exista un conjunto vacío estriba en un principio general de la teoría de conjuntos, el **principio de extensionalidad,** que afirma lo siguiente: dos conjuntos son diferentes entre sí exactamente cuando existe al menos una cosa que es elemento de uno y no del otro. En otras palabras, si la lista de elementos es la misma, estamos operando con el mismo conjunto. Todo conjunto vacío tiene, evidentemente, la misma lista de elementos, así que no hay más que un conjunto vacío. Una consecuencia ligeramente paradójica de todo esto es que, por ejemplo, el conjunto de todas las mujeres que han sido Presidente de los EE.UU. es idéntico con el conjunto de los perros que escriben programas de computadora. De todos modos entenderemos esto mejor si observamos la difereencia entre (a) el modo en que se escogen los elementos de un conjunto (los criterios para distinguir entre elementos y no-elementos) y (b) los elementos que de hecho se han escogido. Es claro que los mismos elementos se pueden escoger de modos

muy diferentes. La idea del principio de extensionalidad es prescindir totalmente del modo en que los elementos de un conjunto han sido elegidos. Esta distinción está relacionada con otra que tendrá gran importancia en los capítulos siguientes: la distinción entre **intensión** y **extensión** de una expresión en un lenguaje: Estudiemos un sintagma nominal que describe un conjunto, p. ej.: *los españoles pelirrojos*. Podemos decir que este sintagma selecciona (o se refiere a) ciertas entidades o cosas en el mundo por medio de una especificación de ciertas propiedades que les son comunes. Las entidades seleccionadas —esto es, las personas que son españolas y pelirrojas— constituyen la extensión del sintagma nominal, mientras que el modo o manera en que son seleccionadas —esto es, los criterios usados para determinar la extensión de la expresión— sería la intensión del sintagma. Vemos ahora que el concepto de 'conjunto' en la teoría de conjuntos se puede considerar **extensional** en el sentido de que no hay que preocuparse por el modo en que los miembros de un conjunto se seleccionan. De ahí el nombre de principio de extensionalidad.

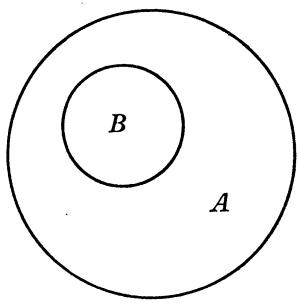
Lo que llevamos dicho pone de manifiesto que el concepto matemático de conjunto no coincide exactamente con el concepto cotidiano al que nos referimos con palabras como 'clase' o 'grupo', aunque provisionalmente lo hayamos supuesto al principio de este capítulo. Cuando hablamos de grupos en la vida cotidiana, por ejemplo al hablar de grupos de personas, pensamos en ellos como si fueran el mismo en momentos diferentes del tiempo, aunque sus miembros cambien. Así, por ejemplo, hablamos del grupo de personas que gobiernan Inglaterra, diciendo incluso cosas como *este grupo tiene más miembros de los que solía tener,* un enunciado que sería contradictorio si supusiéramos que el principio de extensionalidad es válido para la entidad que designamos con *este grupo*. Nótese también que hay muchas cosas que se pueden decir de los grupos, por ejemplo que realizan tal o cual acción (colectiva) —tal sería el caso en *Nuestro grupo envió una petición al gobierno*—, mientras que por lo menos algunos matemáticos dirían que los conjuntos son entidades abstractas que no hacen tales cosas.

Otro conjunto especial es el **conjunto universal,** que simbolizamos con 1 (el número uno). Para explicar el conjunto universal, hemos de introducir una nueva noción, la de **universo del discurso**, que puede definirse sin pretensiones de exactitud, como 'todo aquello de lo que se habla en un cierto texto o conversación'. Por ejemplo, en un libro de matemáticas el universo del discurso pueden ser todos los números, mientras que en un manual de física podrían serlo todos los cuerpos físicos. El conjunto universal será, pues, el conjunto de todos los objetos en el universo de discurso pertinente.

2.2. RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Hay una serie de conceptos en la teoría de conjuntos que se refieren a las relaciones entre conjuntos. Estas relaciones se pueden representar dibujando los conjuntos como círculos. Consideremos por ejemplo el conjunto de todos los europeos y el conjunto de todos los ingleses. Dado que todos los ingleses son europeos podemos dibujar el diagrama (1) para representar las relaciones entre los dos conjuntos, siendo A el conjunto de los europeos y B el conjunto de los ingleses.

(1)



En tal caso, decimos que B es un **subconjunto** de A o que B está incluido en A. En teoría de conjuntos se distinguen normalmente dos relaciones: inclusión e inclusión propia. Decimos que un conjunto B es un subconjunto propio del conjunto A, cuando todos los miembros de B son miembros de A y además hay al menos un miembro de A que no es miembro de B. Escribimos $A \subset B$ con el símbolo $\subset$ para 'es un subconjunto propio' o 'está incluido estrictamente en'. Si, como ocurre a menudo, no afirmamos que A contiene al menos un elemento que no pertenece a B, escribimos $B \subseteq A$, que quiere decir simplemente 'B está incluido en A' o 'B es un subconjunto de A'.

Si queremos decir que A y B son el mismo conjunto —en otras palabras, que son idénticos—, escribimos $A = B$. Hemos visto en la sección precedente que esto significa que A y B tienen los mismos elementos.

Es importante distinguir entre las relaciones 'es un elemento de' ('es un miembro de') y 'es un subconjunto de'. El conjunto de los ingleses es un subconjunto del conjunto de los europeos, pero no es un elemento de ese conjunto. John Smith, por otro lado, es un elemento del conjunto de los ingleses, pero no un subconjunto de ese conjunto.

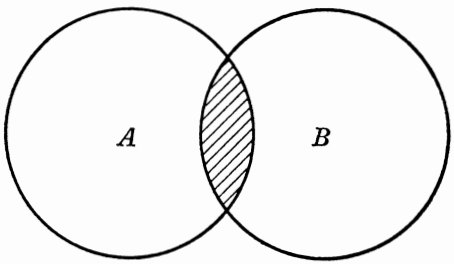
2.3. OPERACIONES CON CONJUNTOS

Hay conjuntos cuyos elementos son, a su vez, conjuntos. (Tales conjuntos se llaman a veces **colecciones** o **familias.)** Por ejemplo, es posible formar, a partir de cualquier conjunto A, el conjunto que contiene todos los subconjuntos de A. Este conjunto se llama **conjunto potencia** de A. Ejemplo: El conjunto $\{a, b\}$ tiene los siguiente subconjuntos: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\emptyset$. (El conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto.) El conjunto potencia de $\{a, b\}$ es pues $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$.

Para distinguir los conjuntos de conjuntos de los conjuntos ordinarios, nos referiremos a ellos utilizando mayúsculas: $\mathscr{A}$.

Hemos hablado de diferentes maneras de definir conjuntos. Un conjunto puede también definirse en términos de otros conjuntos por medio de las llamadas **operaciones con conjuntos.** Dados dos conjuntos A y B, podemos definir el conjunto formado por los objetos que son elementos de A y de B. Llamamos a este conjunto **intersección** de A y B y lo simbolizamos con $A \cap B$. En (1) la intersección de A y B viene indicada por el área sombreada

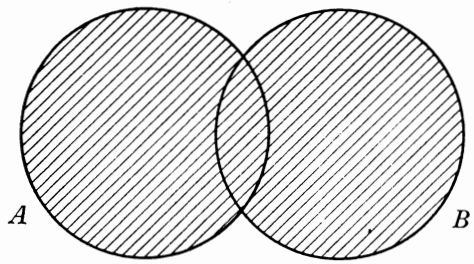
(1)



Ejemplo: Si A es el conjunto de los lingüistas y B es el conjunto de los suecos $A \cap B$ es el conjunto de los lingüistas suecos.

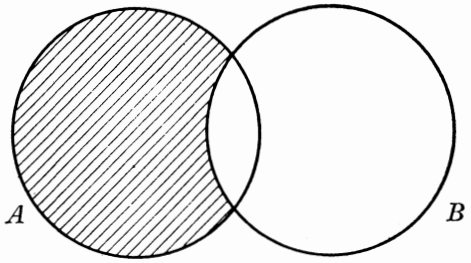
Puede ocurrir también que queramos hablar del conjunto de los objetos que son elementos de al menos uno de los conjuntos A o B. Este conjunto se llama **unión** de A y B y se simboliza por $A \cup B$. Corresponde al área sombreada en (2).

(2)



Ejemplo: Si A es el conjunto de las personas que han leído *Guerra y Paz* y B es el conjunto de las personas que han leído *Ana Karenina*, entonces $A \cup B$ es el conjunto de la gente que ha leído *Guerra y Paz* o *Ana Karenina* (o ambos).

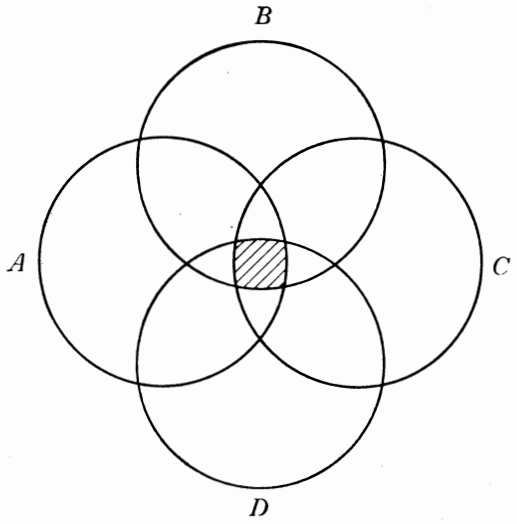
(3)



El conjunto sombreado en (3), esto es, el conjunto de elementos que son miembros de A pero no lo son de B, se llama **diferencia** de A y B y se simboliza $A - B$ (léase 'A menos B'). Ejemplo: Si A es el conjunto de los ingleses y B el conjunto de las personas que hablan portugués, $A - B$ es el conjunto de los ingleses que no hablan portugués (todos los ingleses excepto aquellos que hablan portugués).

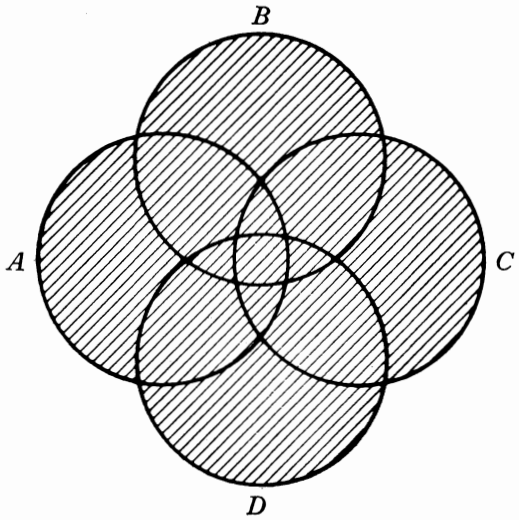
Hasta ahora hemos hablado de operaciones con pares de conjuntos. No hay nada, sin embargo, que nos impida ampliar las operaciones de modo que se apliquen a tres o más conjuntos. Podemos, por ejemplo, definir la intersección de A, B, C, D (el conjunto formado por los elementos comunes a los cuatro conjuntos A, B, C y D) como una operación con el conjunto de conjuntos $\{A, B, C, D\}$ que se puede simbolizar por medio de $\cap \{A, B, C, D\}$ (el área sombreada en (4)).

(4)



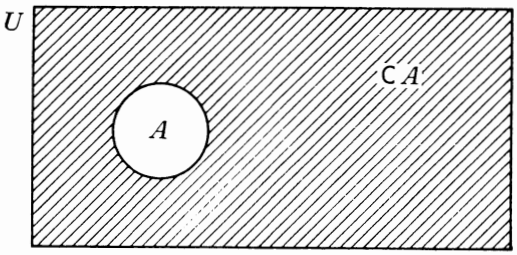
Del mismo modo podemos simbolizar con $\cup \{A, B, C, D\}$ la unión de *A, B, C* y *D* (el conjunto que contiene los objetos que son elementos de al menos uno de los conjuntos *A, B, C* y *D*). La unión de estos conjuntos corresponde en el diagrama (5) al área sombreada.

(5)



Otro concepto importante es el de **complemento** de un conjunto. Dado cierto universo de discurso *U*, por ejemplo el conjunto de todos los seres humanos, y un subconjunto *A* de este conjunto, por ejemplo, el conjunto de los franceses, podemos hablar del conjunto de los miembros de *U* que no son miembros de *A*, es decir, en este caso, del conjunto de los seres humanos que no son franceses. Este conjunto se llama **complemento** de *A* respecto a *U*. en (6) el rectángulo es *U*, el círculo es el conjunto *A* y el área sombreada es el complemento de *A*, que se simboliza con C*A* o con A^-.

(6)



2.4. RELACIONES Y FUNCIONES

Un conjunto de dos elementos se llama **par.** Si decidimos considerar que los elementos del par están ordenados en alguna manera, obtenemos un **par ordenado.** Para simbolizar los pares ordenados utilizamos paréntesis en ángulo $\langle\ \rangle$ en vez de llaves $\{\ \}$. (A veces se utilizan paréntesis ordinarios ( ))[2]. Cuando manejamos pares no ordenados, el orden en que enumeramos los elementos no tiene importancia. Por ejemplo $\{a, b\}$ es el mismo conjunto que $\{b, a\}$. El par ordenado $\langle a, b\rangle$, sin embargo. no es necesariamente idéntico con el par ordenado $\langle b, a\rangle$. Para dejar esto en claro, vamos a estudiar brevemente el concepto de **relación,** que discutiremos más detalladamente en la sección 5.8. Una relación diádica, por ejemplo, 'ser más inteligente que' se da entre dos objetos singulares, que han de ser considerados como miembros de un par ordenado. Es claro que el orden en que se dan los dos objetos es esencial: 'Hengist es más inteligente que Horsa' no es lo mismo que 'Horsa es más inteligente que Hengits'.

Del mismo modo podemos hablar de TRÍO ordenado (con 3 elementos), CUÁDRUPLO (4 elementos), QUÍNTUPLO (5 elementos), y, en general, N-TUPLO. (Corresponden a relaciones de 3, 4, 5 y n lugares o argumentos, respectivamente). Los días del año, por ejemplo, pueden considerarse un 365-tuplo ordenado.

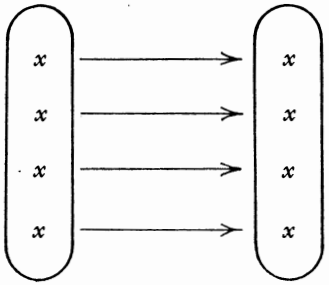
Un concepto muy importante en lógica, matemática y lingüística es el de **función.** Veamos un ejemplo. Todo automóvil tiene una matrícula.

---

[2] Aunque este es el modo en que el concepto de par ordenado se introduce en la mayoría de los manuales (por ejemplo en los mencionados en la nota 1, más arriba), no es totalmente correcto. Como se señala en el texto, el concepto de par ordenado se usa para explicar el concepto de relación binaria o diádica. Consideremos el caso en que alguien está en una cierta relación consigo mismo, por ejemplo, el caso de Edipo, que era su propio padrastro. ¿A qué par ordenado corresponde esta relación? La única respuesta posible es la indicada por el par ⟨Edipo, Edipo⟩. Pero este no es un conjunto de dos elementos, puesto que el primero es idéntico al segundo. En realidad lo que necesitamos es un objeto abstracto que podría representarse como formado por dos 'ranuras', de tal modo que el primer elemento del par ordenado se introduce en la primera ranura y el segundo, en la segunda, pero con la posibilidad de que la misma entidad ocupa las dos ranuras a la vez. Las dos posibilidades pueden ejemplificarse por dos 'juegos'. Imaginemos que tenemos delante de nosotros una caja con canicas. En los dos juegos, el jugador tiene que escoger dos veces entre las canicas, pero en el segundo juego pone en la caja otra vez la canica que ha escogido al principio, de tal modo que puede volverla a coger, si quiere. Sólo en el primer caso obtenemos necesariamente un conjunto de dos miembros. Podemos, pues, distinguir dos conceptos que se corresponden con los dos juegos: UN CONJUNTO ORDENADO DE n MIEMBROS y UN n-TUPLO ORDENADO, teniendo en cuenta que sólo el segundo permite que un elemento aparezca en diferentes lugares. Un par ordenado es, entonces, un 2-tuplo ordenado.

Consideremos ahora el conjunto de los automóviles y el de las matrículas. Lo representamos en el diagrama (1):

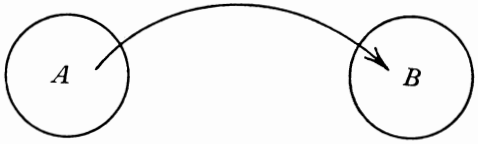
(1)



Cada *x* representa un elemento en su respectivo conjunto (puede haber, desde luego, más elementos). De cada elemento en el conjunto de la izquierda, es decir, el conjunto de los automóviles parte una flecha hacia un elemento en el conjunto de la derecha, a saber, hacia la matrícula correspondiente a cada coche. De esta manera obtendríamos un gigantesco número de pares ordenados en los que el primer elemento es un coche y el segundo, su matrícula: así por ejemplo, ⟨el coche de Paco Pérez, M-27.552⟩. Hemos **asignado** a cada elemento en el primer conjunto un elemento del segundo conjunto. Tal asignación se llama **función.** Para que exista una auténtica función es necesario que haya exactamente un elemento en el segundo conjunto por cada elemento en el primer conjunto (es posible, sin embargo, que varios elementos en el primer conjunto compartan un solo elemento en el segundo conjunto). En otras palabras, las flechas pueden ser convergentes pero no divergentes. (Volveremos sobre este punto al estudiar las propiedades formales de las relaciones en la sección 5.8).

Supongamos ahora que tenemos dos conjuntos *A* y *B* como en la figura (2), y una función (simbolizada por la flecha) que asigna un ele-

(2)



mento distinto de *B* a cada elemento de *A*. Decimos que tenemos una función inyectiva de *A* en *B*, o bien una función que PROYECTA *A* en *B*. Esta última expresión puede parecer extraña al principio, pero se usa a menudo en la bibliografía técnica lingüística. Por ejemplo, una transformación en una gramática transformacional puede ser considerada

como una función que proyecta un conjunto de estructuras en otro conjunto de estructuras, lo cual es un modo imaginativo de decir que para cada estructura que 'entra' en la transformación hay exactamente una estructura que 'sale' de ella.

Otros ejemplos cotidianos de funciones se encuentran, por ejemplo, en cualquier libro que tenga tablas estadísticas. Por ejemplo, podemos encontrarnos con un listado de los países de Europa y su población (3): Un cuadro estadístico de este tipo representa una función en la que la columna de la izquierda corresponde al conjunto *A* en (2) y la columna de la derecha, al conjunto *B*. En otras palabras, tenemos una función que proyecta el conjunto de los países el conjunto de los números.

(3)

Albania	2,337,600
Andorra	25,000
Austria	7,456,403
...	...

Debemos explicar alguna terminología más. Cada elemento de la columna de la izquierda es un **argumento** de la función, y el correspondiente elemento de la columna de la derecha es el **valor** de la función para ese argumento. Denotamos la función misma como letras minúsculas a partir de la *f*, y escribimos $f(x)$ para indicar el valor de la función *f* para el argumento *x*. Si *f* es la función representada en la tabla anterior, podemos, por ejemplo, escribir $f(\text{Suecia}) = 8.000.000$ para indicar que la función toma el valor 8.000.000 para el argumento Suecia; en otras palabras, que la población de Suecia es ocho millones.

El conjunto de los posibles argumentos de un función (por ejemplo, el conjunto *A* en (2)), se llama **dominio** de la función, mientras que el conjunto de valores de la función se llama **rango** o **codominio** de la función.

Si todo elemento de *B* es el valor de la función para algún elemento de *A*, decimos que se trata de una función **suprayectiva.** Si *A* y *B* son el mismo conjunto, es decir, si se trata de una función suprayectiva de *A* en *A*, decimos que la función es una **operación.** Un ejemplo de operación tomado de la matemática, es '*x* es el cubo de *y*' una función de números en números. Si se proyectan los números naturales de 1 a *n*, siendo *n* un número cualquiera, en un conjunto *A* de objetos, tenemos una **secuencia** (en efecto, cada elemento de *A* recibe uno o varios números). Algunas funciones tienen más de un argumento. Consideremos, por ejemplo, un cuadro de distancias en millas entre las grandes ciudades del mundo. Puede parecerse a (4).

(4)

	Berlin	Buenos Aires	Cairo	Calcutta
Berlin	—	7,402	1,795	4,368
Buenos Aires	7,402	—	7,345	10,265
Cairo	1,795	7,345	—	3,539
Calcutta	4,368	10,265	3,539	—

En este caso, la función toma pares de ciudades como argumentos y una distancia como valor.

Concluimos este capítulo mencionando un tipo peculiar de función que nos será de utilidad más tarde. Sean dos conjuntos A y B tales que B es un subconjunto de A. A puede ser el conjunto de los miembros del Parlamento y B el conjunto de los miembros del partido mayoritario. Consideremos ahora un tercer conjunto C que contiene exactamente dos elementos, por ejemplo, los números 1 y 0. Podemos hora construir una función que asigne un 1 a todo elemento de A que sea también elemento de B y un 0 a todo elemento de A que no lo sea de B, es decir, a todo elemento que pertenezca al complemento de B relativo a A. Tal función se llama **función característica** del conjunto B relativo al dominio A.

La elección del conjunto C, de dos elementos, es de hecho arbitraria: cualquier par de objetos vale, siempre que se distingan de los elementos del conjunto que queremos diferenciar de su complemento. Es normal, en lógica, identificar los valores de verdad 'verdadero' y 'falso' (sobre los que volveremos en la sección 3.4) con los objetos utilizados como rango de la función característica.

EJERCICIOS

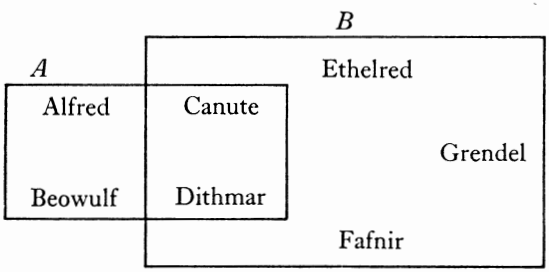
1. Simbolizar:

   (*a*) b es un elemento de C
   (*b*) C es un subconjunto propio de D
   (*c*) la unión de A y C
   (*d*) el conjunto formado por los elementos d, e y g
   (*e*) d no es un elemento de la intersección de A y B.
   (*f*) el complemento de A es un subconjunto propio de la unión de B y C

2. Traducir las siguientes expresiones al castellano
   (*a*) $\{x|x$ es un mozo y María ha besado a $x\}$
   (*b*) $\{x|x$ es danés$\} \cap \{x|x$ es filósofo$\}$

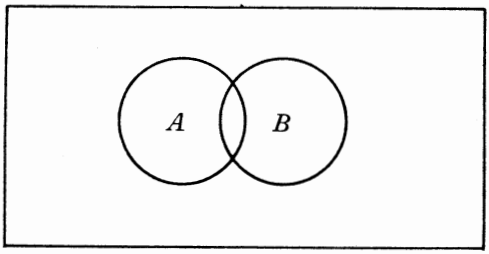
3. ¿Cuál es el conjunto potencia de {Londres, Barcelona, Sevilla}?

4. Dado el siguiente diagrama:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera y cuál falsa?
   (*a*) Alfred es un elemento de $A \cup B$
   (*b*) Alfred es un elemento de $A \cap B$
   (*c*) $A \cap B$ tiene dos elementos
   (*d*) {Etheldered, Fafnir} $\subset (A \cup B)$
   (*e*) {Etheldered, Fafnir, Grendel} $\subset (B - A)$
   (*f*) {Etheldered, Fafnir, Grendel} $\subseteq (B - A)$

5. Sombrear el área correspondiente al conjunto $C(A \cap B)$



6. ¿Qué afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas?
   (*a*) $c \in \{a, b, c\}$
   (*b*) $d \notin \{a, b, c\}$
   (*c*) $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c\}$
   (*d*) $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$
   (*e*) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$
   (*f*) $c \in \{b, \{c\}\}$
   (*g*) $\{c\} \in \{b, \{c\}\}$

7. Indicar los dominios y codominios de las siguientes funciones.
   (*a*) 'la capital de'
   (*b*) 'la mujer de' (en una sociedad monógama)
   (*c*) 'el Jefe de Estado de'

3

Inferencia y análisis lógico de los enunciados [1]

3.1. INFERENCIA

Comparemos los siguientes razonamientos:

(1) Todos los amigos de Juan son mis amigos.
Todos mis amigos son simpáticos
por lo tanto, todos los amigos de Juan son simpáticos.

(2) Ninguno de los amigos de Juan es mi amigo.
Ninguno de los amigos de Juan es simpático
por lo tanto, ninguno de mis amigos es simpático.

Nos damos cuenta inmediatamente de la diferencia entre (1) y (2): Si razonamos como en (1), lo hacemos correctamente, y si razonamos como en (2), lo hacemos incorrectamente. Decimos que en (1) la **conclusión** (el enunciado que comienza con *por lo tanto*) se sigue de las **premisas** (los enunciados que el razonamiento usa como base, en este caso los dos primeros enunciados de (1) y (2)). Cuando una conclusión se sigue de sus premisas y las premisas son verdaderas, la conclusión es verda-

[1] La temática desarrollada en los capítulos 3-5 se trata en una amplia gama de libros de texto, tales como Carnap (1958), Reichenbach (1966), Resnik (1975), Strawson (1967), Tarski (1965) y Thomason (1970), cualquiera de los cuales es recomendable. De entre ellos, los de Reichenbach y Strawson son de orientación preferentemente lingüística. Más avanzados son los siguientes: Anderson y Johnstone (1962), van Fraasen (1971), Mates (1965) y Mendelson (1964).

dera también. En (2) la conclusión no tiene por qué ser verdadera, incluso en el caso de que las premisas lo fueran. Podría ocurrir que de hecho la conclusión fuera verdadera pero ello no dependería de su relación con las premisas. En (1), sin embargo, podemos estar seguros de que si las premisas son verdaderas, la conclusión también lo es. (1) es, pues, una **inferencia lógicamente válida.**

Uno de los más importantes aspectos de la lógica es el estudio de las inferencias válidas y de los enunciados que son necesariamente verdaderos. Hay dos tipos fundamentales de inferencia: las que son necesariamente válidas y las que lo son sólo con un cierto grado de probabilidad.

A cada tipo de inferencia le corresponde un tipo especial de estudio lógico. El estudio de las inferencias necesariamente válidas se desarrolla en el seno de la **lógica deductiva,** mientras que las inferencias que son válidas hasta un cierto grado de probabilidad se estudian en la **lógica inductiva.** Consideremos los dos ejemplos siguientes, que ponen de manifiesto la diferencia entre una inferencia deductiva y una inferencia inductiva.

(3) INFERENCIA DEDUCTIVA

Premisas: Si nieva, hace frío
Está nevando

Conclusión: Hace frío

(4) INFERENCIA INDUCTIVA

Premisas: Cuando nieva es habitual que haga frío
Está nevando

Conclusión: Hace frío

Vemos que la conclusión de una inferencia inductiva es válida sólo con un cierto grado de probabilidad y que no es necesariamente válida como en el caso de la inferencia deductiva.

Hasta el momento, la lógica deductiva ha sido estudiada de manera más completa que la lógica inductiva. Dado que la lógica deductiva nos abre las perspectivas más interesantes sobre la estructura del lenguaje, en lo que sigue nos ocuparemos sólo de ella. A partir de ahora utilizaremos el término 'lógica' como sinónimo de 'lógica deductiva'.

La lógica es, pues, el estudio de aquellas propiedades que hacen necesariamente válida una inferencia o que hacen necesariamente verdadero un enunciado. Puesto que las inferencias válidas son aquellas inferencias en las que las premisas implican lógicamente la conclusión, el centro de

interés de la lógica reside en el estudio de la **implicación lógica** o **consecuencia.**

La validez lógica y la verdad lógica son, en cierto sentido, totalmente independientes de la validez o verdad de hecho de lo que se afirma o argumenta. La validez y verdad lógica son, pues, independientes de la naturaleza de los objetos a los que se refieren afirmaciones y argumentaciones. Para aclarar lo que queremos decir, vamos a estudiar algunos ejemplos de inferencia.

(5) Premisas: Los anarquistas o los comunistas lograrán la victoria final
Los comunistas no ganarán

Conclusión: Los anarquistas lograrán la victoria final

Nótese que la validez de este razonamiento no depende de que se hable de comunistas o anarquistas y de la victoria final. El siguiente razonamiento es del mismo tipo y válido por las mismas razones:

(6) Premisas: Colón o Leif Eriksson descubrieron América
Colón no lo hizo

Conclusión: Leif Eriksson descubrió América

Las propiedades comunes a los razonamientos (5) y (6) que hacen válidos a ambos constituyen lo que llamamos **forma lógica** de los razonamientos. Estudiaremos más detenidamente este concepto en la sección próxima.

Para aclarar el hecho de que la validez de un razonamiento es totalmente independiente de la verdad de hecho de sus premisas y de su conclusión, vamos a analizar tres razonamientos más.

(7) Premisa: La lechuza y la zorra son pájaros

Conclusión: La lechuza es un pájaro

(7) es una inferencia válida, a pesar de que su premisa es de hecho falsa y su conclusión verdadera.

(8) Premisas: Si la luna es un trozo de queso verde, todo el mundo es feliz
La luna es un trozo de queso verde

Conclusión: Todo el mundo es feliz

(8) es una inferencia válida, a pesar de que tanto las premisas como la conclusión son probablemente falsas.

Si intentamos combinar una premisa verdadera con una conclusión falsa como en (9) encontramos por fin que en este caso no puede haber una inferencia válida.

(9) Premisa: Toda ballena es mamífero

Conclusión: Las ballenas son peces

Así pues, la inferencia lógica transmite la verdad; nos dice que algo es un hecho si las premisas son verdaderas. De otro modo: si las premisas de un razonamiento son verdaderas, la conclusión ha de serlo también. Puesto que se puede decir que la validez lógica y la verdad lógica son independientes de la verdad de hecho, se dice a menudo que dependen de la forma (estructura) y del significado de aquellos enunciados que aparecen en los razonamientos estudiados. La lógica deja de lado el problema de si lo que se dice es realmente verdadero, para concentrarse en el estudio de qué tendría que ser verdadero si las premisas fueran verdaderas. La verdad de hecho de las premisas y la conclusión no es cuestión lógica. Desde luego si las premisas son verdaderas de hecho, la conclusión de una inferencia válida ha de ser verdadera también.

La validez lógica y la verdad lógica son formales, algo que a menudo se interpreta como significado que la validez y verdad lógicas dependen de la forma (estructura) del enunciado o razonamiento, más que de aquello acerca de lo que el enunciado trata. Por todo esto se puede decir que las inferencias lógicas (las verdades lógicas) son válidas (verdaderas) independientemente de la configuración del mundo, de cómo sea el mundo de hecho.

3.2. FORMA LOGICA

Veamos ahora algunos ejemplos en los que un razonamiento se expresa en un sólo enunciado:

(1) Todo hombre es mortal; por lo tanto, algún hombre es mortal.
(2) Todo cisne es blanco; por lo tanto, algún cisne es blanco
(3) No todos los hombres son sabios; por lo tanto, algunos hombres no son sabios.
(4) No todos los cisnes son blancos; por lo tanto, algunos cisnes no son blancos.

Vemos de nuevo que es la forma lógica de los enunciados, y no aquello de lo que tratan, lo que es decisivo para la validez del razonamiento. No

podemos seguir la pista de la validez hasta la verdad de hecho de los enunciados de que se trate. El razonamiento en (2) es válido a pesar de que, en realidad, no todos los cisnes son blancos. Hay también cisnes negros. La validez del razonamiento depende sólo del hecho de que la conclusión tendría que ser verdadera si las premisas lo fueran.

Se puede decir que la forma lógica de las premisas determina qué es verdadero (qué conclusiones se pueden sacar) en el supuesto de que las premisas sean verdaderas. Un razonamiento es válido cuando la forma lógica de las premisas tiene realmente la conclusión como consecuencia. De qué traten las premisas es irrelevante. Pueden ser de hecho verdaderas o falsas. En lógica, nos interesamos sólo por si la verdad de las premisas implica realmente la verdad de la conclusión y prescindimos totalmente de la cuestión de qué es lo que realmente se da.

Vamos a estudiar ahora cómo es posible decir que la validez lógica depende de ciertas relaciones formales entre enunciados y componentes de enunciados. Estas relaciones formales dependen habitualmente de la aparición en un enunciado de ciertas partículas o palabras lógicas. En los cuatro ejemplos de arriba estas partículas lógicas son *todos, algunos* y *no.* Podemos escribir ahora los cuatro ejemplos del siguiente modo:

(1) y (2): Todo S es P; por lo tanto algún S es P

(3) y (4): No todos los S son P; por lo tanto algunos S no son P

La forma lógica de los cuatro razonamientos resulta ahora más clara y podemos ver más fácilmente las relaciones formales que los hacen válidos. (5) es un principio lógico importante que podemos plantear ahora:

(5) Si un razonamiento o enunciado, con una cierta forma lógica, es lógicamente válido o verdadero, entonces todos los razonamientos y enunciados de la misma forma lógica son válidos o verdaderos respectivamente.

Una advertencia es aquí de rigor: la forma lógica no es lo mismo que lo que la gramática tradicional ha llamado forma gramatical. De hecho, es un difícil problema el determinar con exactitud la correspondencia entre forma gramatical y forma lógica. Como hemos de ver más adelante, en los últimos años se han propuesto diferentes teorías sobre la relación entre forma lógica y forma gramatical. Se ha propuesto, por ejemplo, que la forma lógica se identifique con ciertos conceptos de una u otra versión de la gramática transformacional, como 'estructura profunda', 'estructura conceptual' o 'representación semántica'.

Podemos ver con facilidad que es insuficiente el tomar en cuenta sólo la estructura gramatical superficial cuando se sacan conclusiones lógicas. Estudiemos los dos enunciados siguientes:

(6) Ricardo es un corrupto asesino

(7) Ricardo es un presunto asesino

Si bien (6) y (7) tienen estructuras superficiales muy semejantes, la conclusión expresada en (8) se sigue sólo de (6).

(8) Ricardo es un asesino

Dado que el concepto de forma (estructura) lógica es tan importante en lógica —hemos visto que es la forma lo que determina la validez lógica y la verdad— uno de los objetivos más importantes en lógica es caracterizar lo más precisa y claramente posible lo que la forma lógica sea. Un modo de lograrlo es encontrar un método de expresión o **notación** que refleje la forma lógica de un enunciado y las relaciones lógicas que pueden existir entre las formas lógicas de los enunciados.

3.3. ENUNCIADOS Y PROPOSICIONES

Hemos dicho que la lógica se ocupa de las inferencias, es decir, de cómo se pasa de las premisas a las conclusiones. Al introducir los conceptos de premisa y conclusión, hablamos de ellos como si se tratara de enunciados. Parecería entonces que la lógica estudiara relaciones entre enunciados. Esto no es completamente exacto, al menos no lo es si por 'enunciado' se entiende una cierta secuencia de sonidos o letras. Veamos el enunciado (1) una vez más.

(1) Todos los amigos de Juan son mis amigos

Si oímos este enunciado, ¿podemos sacar conclusiones del tipo que sea acerca de personas individuales?

No. En primer lugar necesitamos saber quién ha usado el enunciado, pues si no, no sabríamos a quién se refiere el *mis*. Para saber qué inferencias son posibles a partir de un cierto enunciado, necesitamos saber primero qué dice el enunciado acerca del mundo. El mismo enunciado, utilizado por diferentes personas o en diferentes momentos, puede decir cosas muy diferentes sobre el mundo. Si por ejemplo Josefina, hablando de Napoleón, a las dos de la tarde del 6 de enero de 1806, dice 'en este momento tiene hambre', dirá algo bastante diferente de lo que habría dicho Krupskaya si hubiese utilizado el mismo enunciado pero refiriéndose a Lenin, a las tres de la tarde del 7 de enero de 1920. Uno de los enunciados habría sido una afirmación acerca de Napoleón, mientras que el otro lo hubiera sido acerca de Lenin.

Lo determinante en una inferencia es lo que el enunciado dice acerca del mundo y no el enunciado en cuanto secuencia de sonido o signos.

Introduciremos el término **proposición**[2] para designar aquello que un enunciado dice acerca del mundo.

Como ya hemos dicho, el mismo enunciado puede expresar diferentes proposiciones en diferentes ocasiones. Inversamente, diferentes enunciados pueden expresar una y la misma proposición. El enunciado *Hoy es lunes,* usado el lunes, expresa la misma proposición que *Ayer era lunes,* usado el martes.

Cuando queremos señalar una proposición en el lenguaje ordinario usamos a menudo oraciones completivas con *que.* La distinción tradicional entre estilo directo y estilo indirecto puede entenderse, simplificando un poco las cosas, como una distinción entre hablar acerca de enunciados y hablar acerca de proposiciones. Compárese (2) y (3):

(2) Juan Lanas dijo: 'Los impuestos son buenos para los labriegos'

(3) Juan Lanas dijo QUE los impuestos eran buenos para los labriegos

(2) es verdadero sólo si Juan Lanas utilizó las palabras *Los impuestos son buenos para los labriegos.* (3) es verdadero si afirmó el contenido de la oración completiva *que los impuestos eran buenos para los labriegos.* (3) seguiría siendo verdadera si hubiera utilizado otras palabras o incluso otro lenguaje:

(4) Skatter är bra för bönder

(5) Pagar impuestos beneficia a los agricultores

En (3), expresión en estilo indirecto, decimos que Juan Lanas afirmó cierta proposición más bien que un cierto enunciado.

El lenguaje ordinario ofrece cierto apoyo a la idea de que lo que aparece en las inferencias son proposiciones. Parece más natural usar expresiones tales como *verdadero* e *implica* a propósito de oraciones introducidas con un *que* que a cerca de enunciados en forma de cita. Vemos más abajo que las expresiones (a) son preferibles a las expresiones (b).

(6) (a) Es verdad que la nieve es blanca
(b) 'La nieve es blanca' es verdadero

(7) (a) Que la nieve sea blanca implica que la nieve no es negra
(b) 'La nieve es blanca' implica 'la nieve no es negra'

---

[2] Téngase en cuenta que el término 'proposición' se usa también en otros sentidos en lógica y lingüística.

En vez de 'proposición' podríamos haber usado la palabra **afirmación** (statement) que a menudo significa proposición en el lenguaje ordinario. El inconveniente de usar 'afirmación' es que parece implicar alguien que afirme — alguien que realice la afirmación.

Lo normal en lógica es pasar por alto las complicadas relaciones entre enunciados y proposiciones y fingir que cada enunciado corresponde exactamente a una proposición y viceversa. Ciertos lógicos —por ejemplo, W. v. O. Quine— piensan incluso que la proposición es una entidad superflua. De hecho es posible prescindir de la distinción entre enunciados y proposiciones en tanto se eviten expresiones tales como pronombres personales (*yo, tú, él*) y adverbios de tiempo como *hoy, ahora ayer,* cuya interpretación depende de la situación o contexto (ver más adelante, página 125). Se puede, pues, usar los términos 'enunciado' y 'proposición' sin distinguirlos. En lo que sigue, vamos a actuar de acuerdo con esta práctica habitual, aunque el lector debería tener presente la distinción al menos en ciertos momentos.

3.4. MUNDOS POSIBLES Y CONJUNTO-VERDAD DE UNA PROPOSICION

Podemos interpretar formalmente el concepto de proposición utilizando la teoría de conjuntos. Para lograrlo, introducimos el concepto de **mundo posible.** (En la conversación cotidiana usamos a menudo palabras como **'caso'** o **'situación'** en vez de 'mundo').

En primera aproximación la idea es ésta: cualquiera puede imaginarse que el mundo en que vivimos podría ser diferente en algún aspecto de lo que en realidad es, y podemos también hablar con sentido de lo que ocurriría si el mundo fuera diferente, como en el siguiente enunciado:

(1) Si no hubiera llovido esta mañana, habría ido al campo

Podemos entonces decir que 'el mundo podría haber sido de otra manera'. En vez de esta expresión compleja utilizaremos la expresión más corta 'mundo posible' [3].

Hemos dicho ya que una proposición es lo que un enunciado dice, en una determinada ocasión, sobre el mundo. Podemos decir esto de otro modo. Supongamos que cierta proposición, por ejemplo la de que Lincoln admiraba a Jefferson Davis, es verdadera. Esto es lo mismo que

[3] Los 'mundos posibles' fueron introducidos por G. W. v. Leibniz en su *Discurso de Metafísica.* Leibniz mantenía la idea de que nuestro mundo es el mejor de los posibles. Una discusión de esta idea se encuentra en Voltaire (1759).

decir que nuestro mundo pertenece a un conjunto de mundos posibles, en concreto el conjunto de mundos posibles en los que ocurre que Lincoln admiraba a Jefferson Davis. Para cada proposición podemos encontrar un conjunto de mundos posibles en los que la proposición es verdadera. Llamaremos a este conjunto el **conjunto-verdad** de la proposición. Así pues, una manera de caracterizar una proposición es dar su conjunto-verdad, esto es, el conjunto de mundos posibles en que es verdadero.

Inversamente, un mundo posible puede caracterizarse como el conjunto de proposiciones que son verdaderas en él (y que, por lo tanto, lo describen).

Otra manera equivalente de caracterizar una proposición consiste en hablar de la función característica (véase p. 14) del conjunto-verdad en vez de tomar en consideración el conjunto-verdad mismo. Obtenemos entonces una función que asigna a cada mundo posible uno de los valores 'verdadero' o 'falso', según que la proposición sea verdadera o falsa en el mundo en cuestión. Algunos lógicos identifican, desde luego, la proposición con esta función. Debido a ello nos encontramos a veces con afirmaciones de que 'las proposiciones son funciones de mundos posibles a valores de verdad'. Quizá una parábola ayude a captar la idea. Pensemos en la proposición como en una condición sobre mundos posibles. Imaginemos un ser sobrenatural que tiene todos los mundos posibles en un gran cesto, de donde los va sacando uno por uno y los seleciona según que cumplan la condición o no la cumplan (es decir, según que la proposición sea verdadera o falsa en el mundo en cuestión). Si se quiere, el ser sobrenatural estampa en cada mundo la palabra 'verdadero' o 'falso' según que se cumpla o no la condición, al modo en que un inspector del gobierno estampa la palabra 'aprobado' o 'no aprobado' en las mercancías según que éstas cumplan ciertas condiciones o no. De este modo, una proposición sería un principio de clasificación de mundos posibles en dos categorías: aquellos en que la proposición es verdadera y aquellos en que es falsa. En este sentido una proposición es —o mejor dicho, corresponde a— una función de mundos posibles a valores de verdad.

3.5. ENUNCIADOS ANALITICOS Y SINTETICOS

La **verdad analítica** se introduce a menudo como un concepto que engloba el de verdad lógica. Toda verdad lógica es analítica, pero hay verdades analíticas que son verdades lógicas. Las verdades analíticas que son también verdades lógicas, por ejemplo.

(1) No es cierto que el agua sea y no sea un elemento químico

son verdaderas por su forma lógica, mientras que las otras verdades analíticas dependen de ciertas relaciones semánticas entre palabras que no pertenecen al vocabulario 'lógico' del enunciado o razonamiento. La **sinonimia** (igualdad o semejanza de significado) y la **hiponimia** (inclusión de significado) son las más comunes entre tales relaciones semánticas [4]. El enunciado (2) es un ejemplo de enunciado que, debido a una sinonimia parcial, es analíticamente verdadero pero no lógicamente verdadero.

(2) Ningún soltero está casado

(3) es una inferencia analíticamente válida, por razón de una hiponimia, pero no es lógicamente válida.

(3) Premisa: Esto es una rosa

Conclusión: Esto es una flor

La diferencia entre verdades analíticas que dependen de la forma lógica y verdades que dependen de relaciones semánticas es una diferencia de grado y no de categoría. La distinción entre lo que uno quiera considerar forma (o estructura) y lo que se quiera considerar significado es, al menos en parte, arbitraria. En última instancia, el que una palabra pertenezca al vocabulario lógico o no es una cuestión de decisión.

Si se niega un enunciado analíticamente verdadero, el resultado es un enunciado que ha de ser falso en virtud de su significado o de su forma —un enunciado **analíticamente falso** o contradicción, por ejemplo (4).

(4) No es verdad que todo soltero no esté casado

Los enunciados analíticamente verdaderos o analíticamente falsos se llaman **enunciados analíticos** [5]. Todos ellos tienen en común que su valor de verdad es independiente de cómo sea el mundo. Un enunciado analíticamente verdadero es VERDADERO EN TODO MUNDO POSIBLE; un enunciado analíticamente falso es FALSO EN TODO MUNDO POSIBLE. Podemos decir que el conjunto-verdad de los enunciados analíticamente verdaderos es 1 (el conjunto de todos los mundos posibles y que el de los enunciados analíticamente falsos es Ø.

Los enunciados que no son analíticos se llaman **sintéticos.** Son verdaderos o falsos en dependencia de la configuración del mundo; en otras

[4] Cfr. Lyons (1968) y Katz (1972) para una discusión sobre relaciones de este tipo.

[5] A veces el término 'enunciado analítico' se utiliza sólo para enunciados que son analíticamente verdaderos.

palabras, son verdaderos en unos mundos y falsos en otros. Un ejemplo de enunciado sintético es

(5) Carlos I fue decapitado en 1649

Igual que la frontera entre verdad lógica y verdad analítica es, hasta cierto punto, arbitraria, no hay una frontera fija y estricta entre enunciados analíticos y sintéticos. ¿Debemos considerar que (6) es analítico?

(6) El coche de Juan tiene color

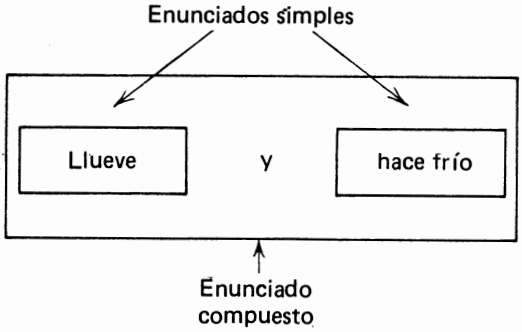
Parece que en nuestro mundo todo objeto material ha de tener color. ¿Ocurre lo mismo en todo mundo posible? Hasta ahora no tenemos respuestas adecuadas a tales preguntas; todavía esperamos una teoría en la que se distingan y relacionen de manera exacta los enunciados analíticos, sintéticos y lógicamente verdaderos.

3.6. ENUNCIADOS SIMPLES Y COMPUESTOS

Un rasgo importante de la concepción tradicional de la estructura lógica es la idea de que todo enunciado puede ser analizado hasta el nivel de los enunciados **simples** o **atómicos.** Estos enunciados simples se combinan o relacionan entre sí de maneras diversas para formar enunciados **compuestos** o **moleculares.** Todo enunciado es simple o compuesto, es decir, todo enunciado es simple o está construido partiendo de enunciados simples de una manera muy precisa.

La distinción entre enunciados simples y compuestos ni es nueva ni exclusiva de la lógica. Existe también en la gramática tradicional, en donde las interdependencias entre enunciados simples y compuestos se han estudiado desde siempre bajo los títulos de coordinación y subordinación (parataxis e hipotaxis). (1) muestra cómo se puede formar un enunciado compuesto a partir de dos enunciados simples por medio de *'y'*.

(1)



3.7. EL ALCANCE DEL ANALISIS LOGICO

El análisis de la forma lógica se puede desarrollar en diferentes niveles o con diferentes grados de finura. Un modo tradicional de dividir la lógica, lo hace según el nivel de refinamiento en que el análisis se desarrolla.

El tipo de análisis lógico más superficial o grosero es aquel en que se investigan las relaciones lógicas que existen entre enunciados simples y compuestos, dejando totalmente de lado la estructura lógica interna de los enunciados simples. Los enunciados simples se toman como unidades no analizadas y sólo se presta atención al modo en que se relacionan entre sí.

El estudio de las relaciones entre enunciados, en cuanto distinto del estudio de las relaciones internas al enunciado, se realiza en la lógica de **enunciados o proposicional.** Si además tomamos en cuenta la estructura interna de los enunciados simples, alcanzamos el nivel de la **lógica de predicados** (cfr. cap. 5) y de varias lógicas modales (cfr. cap. 7).

4

Lógica de enunciados

4.1. CONECTIVAS

Las relaciones lógicas entre los enunciados compuestos y los enunciados simples que los forman están determinadas, en general, por ciertas palabras llamadas **conectivas enunciativas** (o **proposicionales**) [1]. Las conectivas proposicionales pertenecen habitualmente a la categoría gramatical tradicional de las conjunciones (*y, o, por lo tanto, porque, ya que, pero, antes que, como, aunque, si... entonces*).

En los siguientes ejemplos se verá con claridad que las conectivas combinan enunciados de manera lógicamente diferentes.

(1) Luis es un sindicalista aunque lea a Pemán

(2) Luis es un sindicalista y lee a Pemán

(3) Luis es un sindicalista o lee a Pemán

En los tres casos se unen dos enunciados, pero los resultados son diferentes según cuál sea la conectiva elegida.

El hecho de que realmente estemos tratando con relaciones lógicas diferentes se ve de modo particularmente claro si observamos las conclusiones podemos sacar de los tres enunciados. De (1) se sigue más o menos que no es de esperar que un sindicalista lea a Pemán. De (2) y (3) no se sigue tal conclusión. (3) no implica siquiera que los dos enunciados componentes sean verdaderos, sino sólo que al menos uno de los dos lo es.

[1] En la bibliografía en castellano se utilizan también los términos 'funtor', 'yuntor' y 'conector' como sinónimos de 'conectiva'. (N. del T.).

La forma lógica definida por las conectivas determina, por lo tanto, las consecuencias lógicas que se siguen de los enunciados formados por medio de conectivas y otros enunciados.

Dado que al hacer lógica proposicional no estamos interesados en la estructura interna de los enunciados sino sólo en las relaciones lógicas entre ellos, introducimos las llamadas *variables de enunciado* (o *proposicionales*), esto es, signos que se refieren a cualquier enunciado. Habitualmente se utilizan como variables letras latinas minúsculas a partir de *p*. Utilizando variables de enunciado, nuestros anteriores ejemplos tendrían el siguiente aspecto.

(1′) *p* aunque *q*

(2′) *p* y *q*

(3′) *p* o *q*

En este momento estamos utilizando variables para los enunciados pero mostramos la estructura lógica con palabras. Sean cuales sean los enunciados que las variables representan, la estructura lógica continúa siendo la misma, puesto que depende sólo de las propiedades de las conectivas y no del contenido de los enunciados simples.

En lógica, los signos que tienen un significado permanente, no variable, se llaman **constantes.** Puesto que los functores o conectivas tienen esta propiedad y además forman parte de lo que hemos llamado vocabulario lógico, se llaman **constantes lógicas,** es decir, signos que por su significado y función permanente determinan la estructura lógica de los enunciados en los que aparecen. Las variables indican el contenido que se estructura y las constantes representan la estructura misma. Además de las conectivas proposicionales, se consideran constantes lógicas los cuantificadores y los operadores modales (todos los cuales estudiaremos luego).

Tradicionalmente se ha mostrado interés, en la lógica proposicional, por sólo cuatro de las conectivas del lenguaje natural, en concreto por las cuatro conectivas *y, o, si... entonces* y *si y sólo si* (si es que la última se puede considerar una conectiva en el lenguaje natural). También se ha estudiado cómo afecta la negación (*no*) a los enunciados.

La mayoría de las conectivas del lenguaje natural no se han estudiado. Conjunciones como *por lo tanto, ya que, mientras, aunque* y *antes* se han estudiado muy poco desde el punto de vista de su contribución a la estructura lógica de los enunciados.

Ha habido dos razones para ello. La primera y quizá principal es que la lógica se ha estudiado hasta ahora fundamentalmente por su interés matemático, lo que ha llevado a concentrarse en aquellos tipos de inferencia que son más comunes en el razonamiento matemático. Muchos

de los tipos de razonamiento que realizamos en el lenguaje natural están por ello relativamente poco explorados.

La otra razón es más seria desde un punto de vista teórico. Se trata de la cuestión de si, y en qué medida, las conectivas del lenguaje natural son **veritativos-funcionales.** Para entender esta cuestión, hemos de introducir el término **valor de verdad.** Todo enunciado tiene un valor de verdad y sólo uno. Un enunciado verdadero tiene el valor de verdad 'verdadero', mientras que un enunciado falso tiene el valor de verdad 'falso'. Abreviamos los dos valores de verdad por medio de **t** y **f**, respectivamente. Consideremos el siguiente ejemplo.

(4) Hace un día templado y ventoso

(4) se puede parafrasear de modo lógicamente más transparente como sigue

(4′) Hace un día templado y hace un día ventoso

Para que la expresión (4′) sea verdadera tanto (5) (a) como (5) (b) han de serlo.

(5) (a) Hace un día templado
(b) Hace un día ventoso .

Sólo cuando los dos enunciados simples unidos por *y* son verdaderos, es verdadero también el enunciado compuesto, Si uno de los enunciados, o los dos, es falso, la expresión compuesta es falsa. Podemos decir, entonces, que el valor de verdad de la expresión compuesta es función de los valores de verdad de los enunciados simples.

Es veritativo-funcional toda conectiva que tiene la propiedad de determinar el valor de verdad de la expresión compuesta en sola dependencia de los valores de verdad de los enunciados simples unidos por ella. Podemos expresar esto de manera diferente con la ayuda de los dos esquemas siguientes.

(6) (a) ——— y ———
(b) ——— o ———

Utilizamos aquí líneas en vez de variables. Tanto *y* como *o* son veritativo-funcionales y por lo tanto el valor de verdad de los enunciados compuestos que forman están totalmente determinados por los valores de verdad de los enunciados que puedan reemplazar a las líneas.

Uno de los objetivos tradicionales de la lógica ha sido el de mostrar qué conclusiones podemos sacar correctamente de un conjunto de premisas, o, en otras palabras, qué conclusiones preservan la verdad de las premisas. Tiene por lo tanto grave importancia el entender las propieda-

des veritativo-funcionales de las conectivas. Estas propiedades son lo que nos permite juzgar sobre la validez de un razonamiento, en la medida en que ésta es independiente de la verdad de hecho de los enunciados simples.

No todas las conectivas son veritativo-funcionales. Veamos primero las diferencias entre los siguientes enunciados.

(7) Hay tormenta y me siento bien

(8) Hay tormenta pero me siento bien

(9) Dado que hay tormenta, me siento bien

Tanto *y* como *dado que* piden que los enunciados simples que combinan sean verdaderos para que la expresión compuesta que crean lo sea. Si esta condición se cumple, el nunciado con *y* es verdadero, pero no ocurre necesariamente lo mismo con *dado que*. El enunciado puede ser falso. Más allá de la conexión veritativo-funcional entre los dos enunciados, *dado que* requiere que uno de ellos sea la razón del otro. Es decir, es necesario pero no suficiente que los dos enunciados simples sean verdaderos para que el enunciado compuesto con *dado que* sea verdadero. *Dado que* no es, por lo tanto, veritativo funcional.

Si nos volvemos a *y* y *pero,* vemos que el enunciado con *pero* es verdadero si los enunciados simples que une lo son. Así pues, *pero* es veritativo-funcional. De todos modos, continúa existiendo una diferencia entre *y* y *pero,* aunque la diferencia no es veritativo-funcional y la lógica, en su desarrollo actual, no tiene un método para tratarla. Todas las relaciones formales entre enunciados que se tratan en la lógica proposicional son veritativo-funcionales.

Como hemos visto la lógica de enunciados tradicional está limitada por dos factores: sólo se han estudiado conectivas veritativo-funcionales y, entre ellas, sólo han sido analizadas sistemáticamente las que son relevantes desde un punto de vista matemático. El lógico considera sin importancia la introducción de más conectivas veritativo-funcionales, dado que se conoce el número, más bien pequeño, de funciones de verdad y que, además, toda función de verdad se puede reducir a combinaciones de operaciones con una sola función, a saber, la llamada barra de Sheffer, que se escribe | ($p|q$ se lee 'no p o no q').

Originariamente la lógica se entendió como un instrumento de estudio de las propiedades lógicas del lenguaje natural. Se esperaba que traduciendo razonamientos en lenguaje natural el cálculo proposicional aparecerían aquellos en forma más clara, con lo que se haría más fácil ver si eran válidos. La traducción, sin embargo, no resultó fácil; había que traducir el lenguaje natural, con toda su ambigüedad y vaguedad, a un sistema de representación formal no ambiguo escogido, en cierta

manera, arbitrariamente. Dado que tal sistema presentaba grandes ventajas en otros aspectos, la lógica se fue separando más y más del estudio del lenguaje natural. Todavía no hemos descubierto una manera mejor de estudiar y formalizar las relaciones no veritativo-funcionales, aunque el estudio de la pragmática, que plantearemos con cierta extensión en el capítulo 9, quizá ofrece un tipo de solución a este problema.

4.2. EL SIGNIFICADO DE LAS CONECTIVAS LOGICAS

Vamos ahora a estudiar un poco más de cerca el significado de las cinco conectivas que se usan normalmente en lógica proposicional. El requisito de que las conectivas sean veritativo-funcionales implica que tengan, en lógica, un significado definido y fijo que sólo parcialmente coincide con su uso en el lenguaje ordinario. En las secciones siguientes apuntaremos algunas de las diferencias entre su significado en lenguaje natural y en lógica. Las cinco conectivas son: **conjunción**[2] (*y*), **disyunción** (*o*), **implicación** (*si... entonces*), **equivalencia** (*si y sólo si*) y **negación** (*no*), que en realidad no es una conectiva, puesto que no une enunciados sino que opera sobre un sólo enunciado cada vez. Las cinco conectivas se representan en lógica con símbolos especiales.

4.2.1. *Negación* $\sim$

Las siguientes expresiones corresponden normalmente en el lenguaje natural a la negación lógica.

(1) (a) Es falso que
(b) No es el caso que
(c) No
(d) No es exacto que
(e) No es verdad que
(f) Es falso que

La negación se usa en lógica para formar un enunciado compuesto cuyo valor de verdad es el contrario de el del enunciado simple sobre el que opera. Así, si *Está nevando* es verdadero, *No está nevando* ha de ser falso, y al revés. De manera abreviada esto puede expresarse como sigue. Usaremos variables de enunciado y un símbolo especial para no, $\sim$(¬ y – existen, aunque menos corrientemente).

---

[2] El término conjunción tiene un uso especial en lógica y sólo designa *y*, mientras que el término 'conjunción' de la gramática tradicional corresponde, más o menos, en lógica al término 'conectiva'.

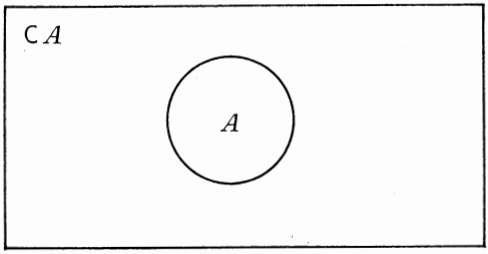
(2)

p	$\sim p$
t	f
f	t

Una abreviatura de este tipo, en la que se indican los valores de verdad de $\sim p$ (el enunciado compuesto) en dependencia de los valores de verdad de p (el enunciado simple) se llama *tabla de verdad.*

Podemos también caracterizar la negación en términos de teoría de conjuntos. Considérese (3). Sea A el conjunto-verdad de p, es decir, el conjunto de mundos en los que p es verdadero. El conjunto-verdad de $\sim p$ será el conjunto de mundos en que p es falso, que coincide desde luego con CA, es decir, con el complemento de A.

(3)



Como ya hemos dicho, la negación lógica no es el equivalente de las expresiones de negación en el lenguaje natural. El lenguaje ordinario parece permitir la aparición de negaciones en el interior del enunciado, pero esto no es posible en lógica proporcional.

(4) No se permite la entrada a los no estudiantes

Hemos de ignorar la negación que precede a 'estudiantes' y traducir (4) como $\sim p$. Otra diferencia es que la posibilidad de hacer hincapié, por medio del énfasis y la entonación, en los diferentes constituyentes de un enunciado negado, se pierde en la lógica proporsicional. Compárese (5) y (6).

(5) Mari no besó a Pepe

(6) *Mari* no besó a Pepe

(5), si se dice con el acento y entonación normales, es la negación neutral de *Mari besó a Pepe,* mientras que (6), en donde se enfatiza *Mari,* parece presuponer que fue otra quien besó a Pepe. La diferencia entre (5) y (6) no puede reproducirse en lógica proposicional; ambas expresiones se traducirían como $\sim p$.

(7) D. Gil Calzasverdes no creía que a Alfredo le gustaran los pasteles

Finalmente, (7) es ambiguo para mucha gente, puesto que existe la posibilidad de entender que la negación afecta o bien a la oración principal o bien a la subordinada. No es posible reproducir tales complejidades en la representación formal de la lógica proposicional.

4.2.2. *Conjunción* &

La conjunción se asemeja al *y* del lenguaje cotidiano. La conjunción se usa en lógica para construir un enunciado compuesto que es verdadero sólo si son verdaderos los enunciados simples a partir de los cuales se forma el compuesto. Si alguno de los enunciados simples es falso, el enunciado compuesto o **conjunción** (es costumbre usar el nombre de la constante lógica para designar también la expresión compuesta que crea) es también falso. Así (1) es verdadero, mientras que (2) es falso.

(1) El fuego quema y Carnap fue filósofo

(2) El fuego quema y Carnap fue torero

Podemos resumir esto en una tabla de verdad con variables de enunciado y & como símbolo de la conjunción.

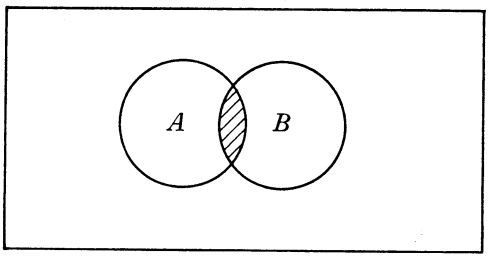
(3)

p	q	p & q
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	f

Vemos que hemos agotado todas las posibilidades de combinar los valores de verdad de p y de q y que sólo si ambos elementos de la conjunción son verdaderos, lo es también la conjunción en su conjunto.

Estudiemos ahora la relación entre el conjunto-verdad de p & q y el conjunto-verdad de los enunciados simples que contiene. En (4) A es el conjunto-verdad de p y B es el conjunto-verdad de q.

(4)



El conjunto-verdad de p & q es el conjunto de mundos en que tanto p como q son verdaderos. Es decir, la intersección de A y B. Se puede decir de modo general que el conjunto-verdad de una conjunción es equivalente a la intersección de los conjuntos-verdad de los enunciados simples que forman parte de la conjunción. Una manera diferente de ver las relaciones entre conjunción e intersección puede ser la siguiente. Supongamos que Emilio (e) es miembro de un club de ajedrez A y de un club de fútbol B. En tal caso es verdad que $e \in A$ & $e \in B$. Sabemos que una conjunción es verdadera sólo si son verdaderos los dos enunciados de que está compuesta.

(5)

$e \in A$	&	$e \in B$
t	t	t
t	f	f
f	f	t
f	f	f

Así pues, sólo en el caso de que e sea miembro tanto de A como de B, o en otras palabras, de que sea un elemento de la intersección de A y B, será verdadera la conjunción compuesta $e \in A$ y $e \in B$.

Al igual que hemos visto en el caso de la negación, el significado de la conjunción lógica es algo diferente del *y* del lenguaje cotidiano. Mienque & sólo se puede usar para unir enunciados, *y* se utiliza para unir constituyentes en el interior de los enunciados. El *y* de *Juan y Pepe* no puede traducirse. Sólo si los términos se pueden distribuir en enunciados diferentes se hace posible la traducción en un enunciado compuesto.

(6) se puede dividir en dos enunciados (véase (7)) si Juan y Pepe tiene cada uno un coche.

(6) Juan y Pepe tienen un coche

(7) Juan tiene un coche y Pepe tiene un coche (p & q)

Sin embargo, si son los dueños de un solo coche, no es posible un análisis del tipo de (7) y basta p como traducción.

Las oraciones unidas por *y* en lenguaje ordinario expresan a menudo una sucesión de hechos. Si se cambia el orden de los elementos de la conjunción, cambia con él el orden de los sucesos

(8) Gunnar se tumbó en el lecho y murió

(9) Gunnar murió y se tumbó en el lecho

En lógica p & q es siempre equivalente a q & p[3]. La conjunción lógica es por ello atemporal e incapaz de tratar los aspectos temporales que, claramente, tiene *y*, como se ve en la comparación de (8) con (9).

Hay otros muchos usos de *y* en el lenguaje cotidiano. A menudo ocurre que no deben analizarse como conjunciones lógicas.

(10) Tócame y te beso

(11) Corre un kilómetro diario y te sentirás un hombre nuevo

(10) y (11) deberán probablemente analizarse como implicaciones y no como conjunciones.

(10) (*a*) *Si* me tocas, *entonces* te beso

(11) (*b*) *Si* corres un kilómetro diario, *entonces* te sentirás un hombre nuevo

En lógica de enunciados es habitual admitir sólo conjunciones de dos enunciados. En el lenguaje ordinario no existe tal limitación, p. ej.

(12) Julio fuma y Octavio va de fulanas y Antonio bebe y Cleo se lamenta

Nada hay que impida la construcción de una lógica de enunciados que opere de esta manera, es decir, permitiendo que la conjunción una más de dos enunciados. En este caso resulta práctico poner & delante de los enunciados que se han de combinar y escribir la expresión del siguiente modo: & (p, q, r, s, t, u, v, w). Este método de escritura (la llamada notación polaca, que introduciremos en uno de los ejercicios) puede, naturalmente, utilizarse también cuando sólo se unen dos enunciados. Todo esto vale también para nuestra próxima conectiva, la disyunción. Además hay que tener en cuenta que ((p & q) & r) es lógicamente equivalente a (p & (q & r)), lo que significa que toda conjunción, independientemente de su tamaño, puede reducirse a una cadena de conjugaciones binarias (en terminología matemática decimos que la conjunción es **asociativa).**

4.2.3. *Disyunción* ∨

La disyunción corresponde muy exactamente al *o* del lenguaje ordinario. La disyunción se utiliza en lógica para crear un enunciado compuesto (llamado también **disyunción**) que es falso sólo si los dos enunciados simples que lo forman son falsos. Basta, pues, con que uno de los enunciados que forman la disyunción sea verdadero para que la dis-

[3] En términos matemáticos, la conjunción es *conmutativa*, es decir,

$$p \,\&\, q \equiv q \,\&\, p.$$

yunción completa lo sea. Así, dado el actual estado de nuestros conocimientos, (1) es falso y (2), verdadero.

(1) Marte es un satélite o un agujero negro

(2) Marte es un planeta o un agujero negro

La tabla de verdad para la disyunción, con el símbolo especial $\vee$, es la siguiente

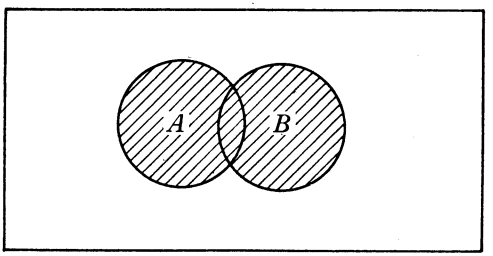
(3)

p	q	$p \vee q$
t	t	t
t	f	t
f	t	t
f	f	f

Vemos que una disyunción es falsa si los dos enunciados que la forman lo son; en otro caso es verdadera.

En la sección precedente vimos que la conjunción corresponde a la intersección conjuntista. Estudiemos ahora la disyunción. Sean de nuevo A y B en (4) los conjuntos-verdad de p y q respectivamente.

(4)



El conjunto-verdad de $p \vee q$ es el conjunto de mundos en que p o q son verdaderos, o lo que es lo mismo, la unión de A y B. El conjunto-verdad de una disyunción es, por lo tanto, equivalente a la unión de los conjuntos-verdad de los enunciados simples con los que se forma.

Podemos demostrar la conexión entre unión y disyunción de un modo distinto. Supongamos que sabemos que Emilio (e) es miembro de un sólo club o de los dos. En este caso será verdadero lo siguiente: $e \in A \vee e \in B$. Vemos que la disyunción de los enunciados $e \in A$ y $e \in B$ es verdadera sólo si e es elemento de la unión de A y B.

Otra vez encontramos aquí discrepancias entre la disyunción lógica y el uso de *o* en el lenguaje natural.

A menudo se indica, con el *o* del lenguaje ordinario, un tipo más estricto de disyunción, que sólo es verdadero si exactamente uno de los elementos de la disyunción lo es. Para esta conectiva se utiliza a me-

nudo un signo propio, $\oslash$, y se llama disyunción **exclusiva,** para distinguirla de $\vee$, disyunción **inclusiva.** La disyunción exclusiva tiene la siguiente tabla de verdad.

(5)

p	q	$p \oslash q$
t	t	f
t	f	t
f	t	t
f	f	f

En este caso la disyunción es falsa si los dos enunciados que la forman son verdaderos o si los dos son falsos. El *o* exclusivo es veritativo-funcional, pero no es el *o* que se utiliza primordialmente en lógica. La razón es que podemos representar el *o* exclusivo usando *y, no* y el *o* inclusivo de la siguiente manera.

(6) $$(p \vee q) \,\&\, \sim (p \,\&\, q)$$

Partiendo del *o* inclusivo, excluimos la posibilidad de que tanto p como q sean verdaderos negando la conjunción que afirma que tanto p como q son verdaderos. Esta es justamente la función del *o* exclusivo. Encontramos un *o* que parece funcionar como una disyunción exclusiva en enunciados y formados con *o bien... o bien...* y en preguntas y peticiones.

(7) O bien Dios es bueno o bien no lo es

(8) ¿Quieres vino blanco o tinto?

(9) ¡La bolsa o la vida!

Un *o* con carácter más claramente inclusivo lo encontramos en (10), donde, naturalmente el caso normal es que los dos elementos de las disyunción sean verdaderos de una persona.

(10) Todo aquel que es ciudadano sueco o ha vivido en Suecia durante el año precedente está obligado a hacer declaración de renta.

Hay que hacer notar que el aire de incertidumbre que en la conversación normal acompaña al uso de *o* no es necesario en lógica. Por lo que a la lógica toca es perfectamente aceptable usar el siguiente enunciado mientras que se mira como cae la primera nevada del invierno.

(11) Está nevando o está lloviendo

Lo único que se precisa para que una disyunción sea verdadera es que lo sea de uno de los enunciados que la forman. Este es el caso en la situación descrita, aunque esté totalmente excluido que esté lloviendo.

Normalmente, sin embargo en la comunicación lingüística intervienen muchas más cosas que propiedades veritativo-fundamentales. El hecho de que (11), pronunciado en la situación antes descrita, se consideraría como una expresión en cierto modo extraña, muestra que además de las propiedades veritativo-funcionales hay otros factores que determinan nuestra interpretación de los hechos lingüísticos.

Como sugestión para un análisis de estos factores podemos decir que hay un conjunto de normas comunicativas[4] que tienden a hacer lo más efectivo posible el intercambio de comunicación entre los participantes en un diálogo. Basándonos en esas normas se podría decir: no se debe decir $p \vee q$ si se puede decir p o p & q, que son expresiones que conllevan más información definida, por virtud de sus tablas de verdad. Las expresiones lingüísticas deberían utilizarse del modo más efectivo posible, logrando que tanto lo que se dice como lo que no se dice tenga relevancia para el modo de entender lo dicho. Este es uno de los supuestos normalmente implícitos en la comunicación lingüística.

4.2.4. *Implicación*

La implicación de la lógica de enunciados es todavía más diferente de las expresiones correspondientes en el lenguaje ordinario (*si... entonces, si* y, a veces, *y*) que las otras conectivas que hemos estudiado. Consideremos algunos ejemplos de *si... entonces* en el lenguaje ordinario.

(1) Si has trabajado mucho (entonces) probablemente estés cansado

(2) Si está lloviendo (entonces) habrá humedad

(3) Si Hengist es más gordo que Horsa (entonces) Horsa es más delgada que Hengist

(4) Si eres buen chico (entonces) tendrás pastel

En (1) y (2), *si... entonces* indica una 'ligazón causal' entre el antecedente y el consecuente. En (4), el antecedente está ligado al consecuente por la obligación de una promesa por parte del hablante. Podemos decir que en (3) *si... entonces* expresa una consecuencia lógica. La lógica proposicional trata la implicación sólo desde el punto de vista veritativo-funcional, y por ello simplemente estipula que una implicación es verdadera cuando su antecedente es falso o su consecuente verdadero. Podemos dar, por lo tanto, la siguiente tabla de verdad para la implicación. Como símbolo utilizamos $\rightarrow$. (Quizá es más corriente usar $\supset$, pero se confunde con facilidad con $\subset$, el símbolo de la inclusión en teoría de conjuntos).

[4] Cfr. en Grice (1975) un estudio de tales normas.

(5)

p	q	$p \rightarrow q$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

La implicación veritativo-funcional se llama habitualmente **implicación material** y, como vemos, sólo es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso. Veamos ahora qué correspondencias hay entre la implicación material y el uso del *si... entonces* en el lenguaje ordinario.

Hay un caso que parece presentar pocos problemas: una oración con *si... entonces* es falsa, al igual que un enunciado con $\rightarrow$, cuando su antecedente es verdadero y su consecuentae falso. Así, en (6).

(6) Si Londres es la capital de Inglaterra, entonces Inglaterra no tiene capital

Quizá es también natural decir que la implicación (el enunciado compuesto) es verdadero cuando tanto el antecedente como el consecuente lo son. Sin embargo lo normal es que se exija algo más de un enunciado formado con *si... entonces* en la conversación normal. Habitualmente se requiere que el antecedente y el consecuente estén ligados por alguna relación, que no es veritativo-funcional, como, por ejemplo, una relación causal o de consecuencia lógica. Véanse los ejemplos (1-4). Consideremos el enunciado (7).

(7) Si Kennedy fue Presidente, entonces la berza es un vegetal

En este caso antecedente y consecuente no guardan ninguna relación entre sí, pero ambos son verdaderos y como los valores de verdad son lo único relevante en una evaluación veritativo-funcional de un enunciado compuesto, (7) ha de tratarse exactamente del mismo modo que el resto de los enunciados con *si... entonces,* en los que además de tener un antecedente y un consecuente verdaderos, existe algún tipo de relación no veritativo-funcional entre ellos.

La situación empeora cuando el antecedente de una implicación es falso. Veamos una apuesta.

(8) Te apuesto a que si llueve, mañana no habrá excursión

Si la condición de que llueva no se cumple, la apuesta no vale, es como si no hubiera apuesta. Parece natural pensar que esto ocurre también en el caso de enunciados puros.

(9) Si los perros son peces, entonces no pueden nadar

En cualquier caso no parece tener sentido decir que algo acerca del valor de verdad de la implicación cuando el antecedente es falso. Hay ejemplos de este tipo (llamados habitualmente enunciados **contrafácticos)** que son todavía más claramente absurdos.

(10) Si fuera invisible, todo el mundo me vería

Supongamos que (10) se analiza en la forma $p \rightarrow q$ y que p es falso, cosa que es demostrable empíricamente. En este caso $p \rightarrow q$ es automáticamente verdadero, por las condiciones de verdad de la implicación.

(11) Si fuera invisible, nadie me vería

(11), que parece mucho más razonable, sería verdadero por la misma razón. No hay modo de dar cuenta de nuestra intuición de que (11) parece bastante razonable, mientras que (10) parece totalmente absurdo. Los dos enunciados se analizan como $p \rightarrow q$ y se tratan de la misma manera desde el punto de vista veritativo-funcional.

(12) Si Daoiz y Velarde eran franceses, entonces eran valientes

(13) Si Daoiz y Velarde eran franceses, entonces no eran valientes

Aunque (13) dice lo contrario de (12), hay que considerar verdaderos a ambos si analizamos el antecedente y el consecuente como unidos por la implicación material, dado que el común antecedente de ambos es falso.

Aunque el análisis de *si... entonces* como implicación material es inadecuado en muchos aspectos, hay unas cuantas cosas que hablan a su favor. Parece que los enunciados en lenguaje ordinario que corresponden a expresiones lógicas veritativo-funcionalmente equivalente a $p \rightarrow q$, tienen muy aproximadamente el mismo alcance que las expresiones del lenguaje ordinario que corresponden a $p \rightarrow q$. $\sim p \vee q$ es equivalente, desde el punto de vista veritativo-funcional, a $p \rightarrow q$. Las tablas de verdad nos dicen que la implicación material es verdadera si su antecedente es falso o su consecuente verdadero. Esto es exactamente lo que expresa $\sim p \vee q$: 'antecedente falso o consecuente verdadero'. Podemos comprobarlo construyendo la tabla de verdad de $\sim p \vee q$.

(14) y (15) corresponden en el lenguaje ordinario a $p \rightarrow q$ y $\sim p \vee q$, respectivamente.

(14) Si estoy en lo cierto, te debo 10 duros

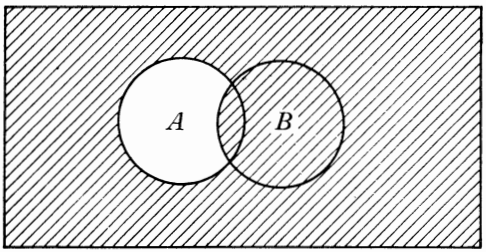
(15) O estoy equivocado o te debo 10 duros

Como vemos, tienen el mismo significado. Esto presta cierto apoyo indirecto al análisis veritativo-funcional de *si... entonces* que hemos estipulado. Ha habido también intentos de usar la implicación material como

base de un análisis de *si... entonces* que utiliza normas comunicativas del tipo que mencionamos antes al hablar de la disyunción [5]. Los antedichos resultados del análisis de *si... entonces* como →, en cierto modo absurdos, se explican desde esta perspectiva como violaciones de normas comunicativas generales.

La contrapartida conjuntista de la implicación no es tan directa como las que hemos estudiado para las otras conectivas. En (16), *A* y *B* son los conjuntos-verdad de *p* y *q*, respectivamente y el área sombreada, el conjunto-verdad de $p \rightarrow q$. (Un buen ejercicio sería comprobar que corresponde a la tabla de verdad en la pág. 41).

(16)



4.2.5. *Equivalencia* ≡

La equivalencia corresponde aproximadamente a *si y sólo si, justamente cuando, sólo cuando, sólo si.* A veces incluso se utiliza un simple *si* para indicar la equivalencia. En cuanto función de verdad, una equivalencia se analiza como una doble implicación material, una que va de antecedente a consecuente y otra de consecuente a antecedente. Dado que el análisis de la equivalencia se basa en el de la implicación, algunos de los problemas de la correspondencia entre implicación y lenguaje ordinario vuelven a aparecer en conexión con la equivalencia.

Otro problema que, en ocasiones, es causa de dificultades, es el de diferenciar entre equivalencia e implicación. Intentaremos clarificar la distinción con dos ejemplos.

(1) Mari pasará el examen si el resultado de su ejercicio escrito es satisfactorio

(2) Mari pasará el examen si y sólo si el resultado de su ejercicio escrito es satisfactorio

---

[5] Cfr. Grice (1975) para un tratamiento de este tipo.

En (1), 'pasar el ejercicio escrito' es una condición **suficiente** pero no **necesaria** para que Mari pase el examen. Exámenes orales, rojas manzanas o incluso un leve coqueteo pueden ser otros medios suficientes. En (2), sin embargo, pasar el ejercicio escrito no es sólo una condición suficiente sino también necesaria para pasar el examen. No hay otros medios.

Dado que la equivalencia es una conjunción de dos implicaciones, obtenemos la siguiente tabla de verdad para la equivalencia. Como símbolo especial usamos $\equiv$ (a veces se usa $\leftrightarrow$ o $\supset\!\subset$). Muy frecuentemente 'si y sólo si' se abrevia en 'sii'.

(3)

p	q	$p \equiv q$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	t

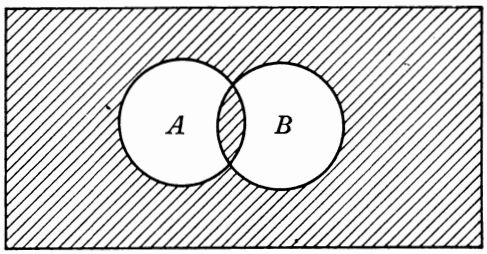
Como vemos, la equivalencia es verdadera sólo cuando los enunciados simples que la forman tienen el mismo valor de verdad. Si pensamos en la equivalencia como en una conjunción de dos implicaciones materiales, entenderemos por qué es así.

(4) $$(p \rightarrow q) \,\&\, (q \rightarrow p)$$

Sabemos que para que una conjunción sea verdadera se precisa que todos los enunciados que la forman sean verdaderos. Para que esta condición se cumpla o bien p y q son ambos verdaderos o bien son ambos falsos. Si tienen diferentes valores de verdad, las condiciones de verdad de la implicación material no se cumplirá en los dos enunciados simultáneamente (el antecedente puede no ser verdadero y el consecuente falso), que es lo que se precisaría para que la conjunción fuera verdadera.

La contrapartida conjuntista de la equivalencia es bastante clara y muestra que se mantiene la condición de simultaneidad del valor de verdad de los dos enunciados. En (5) el conjunto-verdad de $p \equiv q$ está sombreado, mientras que A y B representan los conjuntos-verdad de p y de q respectivamente.

(5)



4.3. COMO SEÑALAR LA ESTRUCTURA CONSTITUTIVA

Tanto en lógica como en lingüística es de gran importancia saber qué estructura tiene una secuencia de símbolos, qué elementos de la secuencia están relacionados entre sí y cuáles no. Hay muchos métodos de representar la estructura lingüística por medio de diagramas. Los más comunes son los diagramas arbóreos, los diagramas cuadrados y los paréntesis. Formalmente son equivalentes, pero difieren en cierta medida en su aplicación práctica. El método habitual, en lógica, de indicar la estructura son los paréntesis.

La razón más importante, en lógica, para señalar la estructura constitutiva es evitar ambigüedades. Sin indicación de cuál es su estructura, la siguiente expresión es, inevitablemente, ambigua.

(1) Que nieva y llueva implica que habrá humedad y hará frío

En expresión simbólica, escribimos

(2) $p \,\&\, q \rightarrow r \,\&\, s$

Existen entonces las siguientes posibilidades de entender la implicación

(3) $(p \,\&\, q) \rightarrow (r \,\&\, s)$

(4) $p \,\&\, (q \rightarrow (r \,\&\, s))$

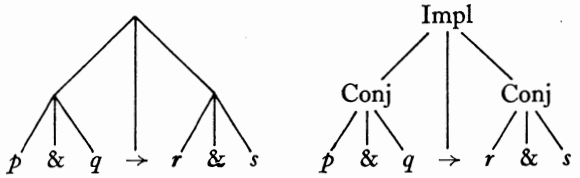
(5) $p \,\&\, ((q \rightarrow r) \,\&\, s)$

(6) $((p \,\&\, q) \rightarrow r) \,\&\, s$

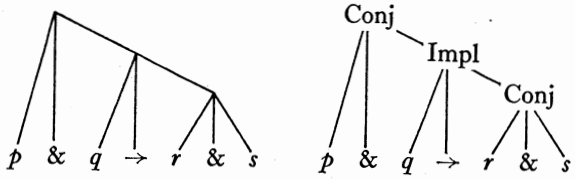
Las diferentes estructuras que hemos indicado con paréntesis en (3)-(6) también pueden ponerse de manifiesto con diagramas arbóreos y cuadrados.

DIAGRAMAS ARBOREOS. Daremos primero los árboles sin rotular las ramificaciones (una ramificación es una intersección de líneas en un árbol) y luego con ramificaciones rotuladas. Los rótulos de las ramificaciones se abrevian como sigue: Implicación = Impl, Conjunción = Conj. La conectiva que está colocada directamente debajo de la ramificación más alta se llama **conectiva principal** del enunciado. En (3′) es la flecha de la implicación.

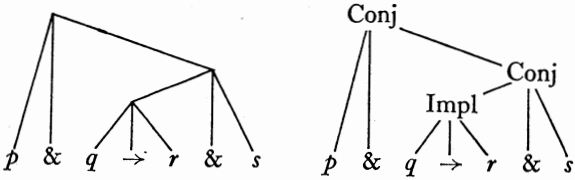
(3′)



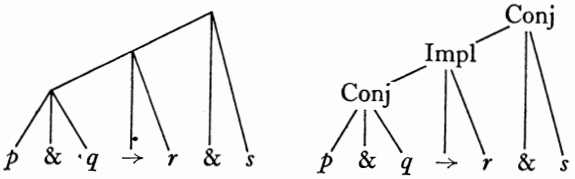
(4′)



(5′)



(6′)



DIAGRAMAS CUADRADOS. En este caso ponemos rótulos en el diagrama desde el principio.

(3″)

Impl						
Conj				Conj		
p	&	q	→	r	&	s

(4″)

Conj						
		Impl				
				Conj		
p	&	q	→	r	&	s

(5″)

Conj						
		Conj				
		Impl				
p	&	q	→	r	&	s

(6″)

Conj						
Impl						
Conj						
p	&	q	→	r	&	s

Los rótulos pueden usarse también, naturalmente, con paréntesis (tenemos entonces los llamados paréntesis rotulados). Abreviamos el término implicación por I y conjunción por C.

(3‴) $$({}_{I}({}_{C}p \;\&\; q) \rightarrow ({}_{C}r \;\&\; s)_{C})_{I}$$

(4''') $(_{C}p \;\&\; (_{I}q \rightarrow (_{C}r \;\&\; s)_{C})_{I})_{C}$

(5''') $(_{C}p \;\&\; (_{C}(_{I}q \rightarrow r)_{I} \;\&\; s)_{C})_{C}$

(6''') $(_{C}(_{I}(_{C}p \;\&\; q)_{C} \rightarrow r)_{I} \;\&\; s)_{C}$

Antes de acabar esta digresión conviene decir que normalmente los paréntesis se usan en lógica sólo en la medida en que son necesarios para lograr claridad. A menudo se utilizan las siguientes convenciones: si un signo de negación no va seguido de paréntesis, el **alcance** de la negación es siempre el menor posible, es decir, la negación se aplica al constituyente más pequeño que esté a su derecha. En general, llamamos alcance de un operador lógico a las partes de una expresión a las que afecta el operador. El alcance se indica por contigüidad directa, como en el caso de la negación, o por paréntesis, en cuyo caso todo lo que está encerrado dentro de una pareja de paréntesis constituye el alcance.

(7) $\sim p \;\&\; q$

(8) $\sim (p \;\&\; q) \;\&\; r$

Así, en (7) la negación se aplica sólo a p y no a la conjunción completa, mientras que en (8) los paréntesis hacen que se aplique la negación a la conjunción más a la izquierda y no a la expresión entera. De modo semejante, se suele dar un alcance menor a & y a $\vee$ que a $\rightarrow$ y $\equiv$. Si aceptamos estas convenciones, nuestro ejemplo (2)

(2) $p \;\&\; q \rightarrow r \;\&\; s$

deja de ser ambiguo y ha de ser interpretado como $(p \;\&\; q) \rightarrow (r \;\&\; s)$. De todos modos no vamos a seguir estas convenciones excepto en el caso de la negación, y usaremos paréntesis siempre que parezca necesario para evitar ambigüedades.

4.4. SINTAXIS Y SEMANTICA DEL CALCULO DE ENUNCIADOS

Hemos alcanzado el punto en el que podemos dar un resumen de los símbolos más simples de la lógica de enunciados. Podemos dar también un conjunto de reglas que nos dicen cómo se pueden combinar para formar unidades mayores. Las reglas tienen la propiedad de decir exactamente qué combinaciones están permitidas y cuáles no.

La enumeración de los símbolos simples pequeños se suele llamar, en lógica, **vocabulario.** Tiene la misma función que un diccionario para el lenguaje natural. Las reglas que definen las combinaciones permitidas de unidades simples —las llamadas **expresiones bien formadas (ebf)**— se suelen llamar **reglas de formación** y pueden compararse con las reglas

gramaticales de un lenguaje. Vocabulario y reglas de formación forman la **sintaxis** de la lógica. La sintaxis no nos dice nada sobre cómo han de interpretarse signos simples y expresiones, es decir, qué significado tienen. Esto último constituiría el tema de la semántica.

Estamos ahora en situación de poder definir qué es un lenguaje formal. Un lenguaje formal es un conjunto de expresiones definido en relación con un vocabulario a partir del cual se forman las expresiones de acuerdo con las reglas de la sintaxis e interpretado por las reglas de la semántica. Ha de hacerse en este punto una importante distinción entre hablar EN un lenguaje de este tipo y hablar ACERCA de él. El lenguaje mismo —el objeto que investigamos— se llama **lenguaje objeto** y el lenguaje que usamos para estudiar el lenguaje objeto se llama **metalenguaje.** Así pues, el lenguaje que usamos en gramática o en lógica para hablar acerca de otros lenguajes, se puede caracterizar como metalenguaje.

4.5. SINTAXIS

Al dar la sintaxis de la lógica de enunciados comenzamos por su vocabulario.

(1) VOCABULARIO

(i) Un número infinito de variables de enunciado: p, q, r, s, t, p_1, $q_1 \ldots$ p_2, $q_2 \ldots$

(ii) Las conectivas lógicas: $\sim$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$

(iii) Paréntesis: ( )

(iv) No hay otros signos en las expresiones de la lógica proposicional

En segundo lugar hemos de indicar qué combinaciones de signos están permitidas —qué expresiones están bien formadas—. Damos, pues, las reglas de formación en la lógica de enunciados.

(2) REGLAS DE FORMACION

(i) Toda variable de enunciado es una ebf

(ii) Si α y β son cualesquiera ebfs., entonces (a) $\sim \alpha$, (b) $(\alpha \,\&\, \beta)$ (c) $(\alpha \vee \beta)$, (d) $(\alpha \rightarrow \beta)$ y (e) $(\alpha \equiv \beta)$ son también ebfs.

(iii) Una expresión está bien formada sólo si ha sido construida según estas reglas.

En la regla (ii) queremos dejar claro que estamos hablando acerca de un lenguaje en un metalenguaje y por ello hemos introducido las llamadas

metavariables (las letras griegas α, β) en vez de las variables de enunciado que cabría esperar. Hacemos esto para indicar que no estamos hablando de enunciados SIMPLES cualesquiera sino de cualquier ebf, escogida arbitrariamente, de la lógica de enunciados. α y β pueden ser sustituidas por cualquier ebf. Por lo tanto las reglas de formación pueden aplicarse sobre sus propios resultados. Consideremos, por ejemplo, las ebfs p y q. De acuerdo con la regla (ii) (b) podemos formar con ellas la ebf $(p \,\&\, q)$. Podemos aplicar la regla (ii) (b) de nuevo y obtenemos $(p \,\&\, q) \,\&\, p$. Como vemos, α se sustituye aquí por $p \,\&\, q$, que es una ebf. De esta manera, aplicando paso a paso les reglas, podemos generar expresiones tan largas y complejas como queramos. Las reglas que tienen esta propiedad se llaman **recursivas** y han jugado un gran papel en el desarrollo de la gramática generativa y de muchos lenguajes de computador. A menudo llamamos **inducción** (matemática) a la aplicación de reglas recursivas.

Al ser recursivas las reglas sintácticas, podemos construir un número indefinidamente amplio de expresiones por medio de un conjunto finito de reglas. Dado que todo lenguaje natural contiene un conjunto indefinido de oraciones gramaticalmente correctas, la gramática de un lenguaje natural tiene probablemente que contener reglas recursivas.

Las siguientes expresiones valen como ejemplo de ebfs. No utilizaremos aquí los paréntesis externos de la regla (ii), que fueron introducidos sólo para evitar ambigüedades: p, q, $p \,\&\, q$, $(p \,\&\, q) \rightarrow q$, $p \vee q$, $(p \,\&\, q) \equiv$ $\equiv (p \vee q)$. Las siguientes expresiones no son ebfs: $\&\, q$, $\vee r \rightarrow q$, $q \sim \rightarrow p$.

Las reglas (2) (i) y (2) (ii) pueden formularse, de modo equivalente, como sigue:

(3) (i)
$$S \rightarrow \begin{Bmatrix} \sim S \\ (S \,\&\, S) \\ (S \vee S) \\ (S \rightarrow S) \\ (S \equiv S) \end{Bmatrix}$$

(ii) $$S \rightarrow p, q \ldots p_1, q_1 \ldots p_2, q_2 \ldots$$

Escritas de esta manera, las reglas tienen la misma forma que las llamadas **reglas de estructura de frase** en la gramática generativa. Dado que en una gramática generativa la regla (2) (iii) se acepta por una convención implícita, las reglas (3) (i) y (ii) constituyen una descripción alternativa y equivalente de la sintaxis de la lógica proposicional.

4.6. SEMANTICA

Al describir la sintaxis de la lógica de enunciados hemos considerado los símbolos lógicos como si estuvieran 'vacíos', sin significado. Pero estamos interesados también, naturalmente, en utilizar la lógica para razonar sobre el mundo que nos rodea. Tan pronto como ponemos en relación los signos que hemos estado estudiando con los fenómenos que representan, damos el paso de la sintaxis a la **semántica.** La semántica es el estudio de cómo se relacionan las expresiones sintácticamente correctas con aquello de lo que tratan.

Dado que nuestro interés primordial en lógica está en los enunciados, vamos a estudiar el significado de los enunciados. Uno de los mejores medios para entender el significado de un enunciado es imaginar cómo tendría que ser el mundo para que el enunciado fuera verdadero.

(1) El Barón de Münchhausen se salió del agua estirándose de los pelos

La razón de que (1) sea difícil de entender es que uno no se imagina con facilidad cómo tendría que ser el mundo para que (1) fuera verdadero. El concepto de verdad nos da, pues, un instrumento preciso para captar la relación entre un enunciado y aquello de lo que trata. Podemos caracterizar una importante parte del significado de un enunciado formulando las condiciones que tendría que cumplir el mundo para que el enunciado fuera verdadero (en otras palabras, diciendo en qué mundos sería verdadero). Estas condiciones se llaman **condiciones de verdad** del enunciado. El significado de un enunciado se equipara, en lógica, con sus condiciones de verdad. Naturalmente, esto significa que hay importantes aspectos del significado que la lógica pasa por alto, pero un análisis del tipo indicado satisface ya las necesidades de la lógica, puesto que estamos interesados sólo en aquellos aspectos del significado que afectan a la verdad y a la inferencia lógicas. (Volveremos sobre esto en el capítulo 10).

La lógica de enunciados trata los enunciados simples como unidades no analizadas y por ello no podemos hablar, dentro de los límites de esa lógica, de las condiciones de verdad de los enunciados simples. Podemos, eso sí, decir bastantes cosas acerca de las relaciones entre las condiciones de verdad de los enunciados compuestos y las condiciones de verdad de los enunciados simples a partir de los cuales aquellos se forman.

Dicho con más precisión, en lógica proposicional estamos interesados en estudiar cómo se determina el valor de verdad de un enunciado compuesto a través del valor de verdad de los enunciados que lo constituyen y de las conectivas que en él aparecen. Así pues, el valor de verdad es aquí la única propiedad relevante de los enunciados simples. Para

estudiar qué ocurre en los enunciados compuestos, lo habitual es atribuir arbitrariamente un valor de verdad a cada variable de enunciado. (Desde luego sería posible utilizar auténticos enunciados y comprobar el valor de verdad de cada enunciado, pero este procedimiento tendría un interés muy limitado, puesto que lo que nos interesa es el efecto de la conectiva sobre el valor de verdad del enunciado compuesto, dado un conjunto cualquiera de valores de verdad de los enunciados constituyentes.)

Vamos a dar ahora las condiciones de verdad de los enunciados compuestos por medio de la información que nos ofrece la tabla de verdad de cada conectiva. Vamos a utilizar de nuevo letras griegas como metavariables para expresiones cualesquiera, lo que significa que nuestras condiciones de verdad serán recursivas. Se pueden aplicar una y otra vez para determinar las condiciones de verdad de expresiones cada vez más complejas. De nuevo establecemos una diferencia entre el lenguaje de la investigación —el metalenguaje— y el lenguaje que investigamos —el lenguaje objeto. Estamos dando las condiciones de verdad del lenguaje objeto y no pretendemos ningún tipo de análisis del metalenguaje, del que simplemente suponemos que se entiende. El símbolo 'sii' que utilizamos más abajo pertenece al metalenguaje —es parte de la descripción de las condiciones de verdad del lenguaje objeto— y debe, por lo tanto, diferenciarse de $\equiv$, que es un símbolo del lenguaje objeto, el lenguaje que estudiamos. En (2) se definen, recursivamente, las condiciones de verdad de los enunciados compuestos de la lógica proposicional.

(2) SEMANTICA DE LA LOGICA PROPOSICIONAL

(i) $\sim \alpha$ es verdadero sii α no es verdadero

(ii) $\alpha \,\&\, \beta$ es verdadero sii tanto α como β son verdaderos

(iii) $\alpha \vee \beta$ es verdadero sii al menos una de las expresiones α o β son verdaderas

(iv) $\alpha \rightarrowtail \beta$ es verdadero sii α no es verdadero o β es verdadero

(v) $\alpha \equiv \beta$ es verdero sii α y β tienen el mismo valor de verdad

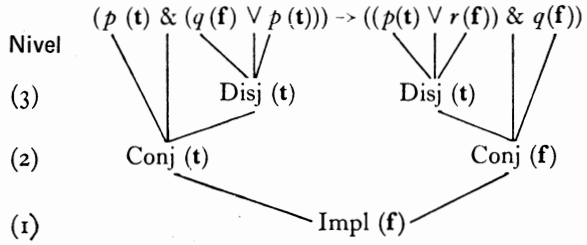
Por medio de estas condiciones de verdad podemos calcular el valor de verdad de una expresión por compleja que sea. Veamos algunos ejemplos.

(3) $$(p \,\&\, (q \vee p)) \rightarrow (p \vee r) \,\&\, q)$$

Vamos a suponer ahora que se han asignado valores de verdad a las variables, bien por medio de una asignación arbitraria, bien por sustitución de las variables por enunciados declarativos y posterior asignación de sus valores de verdad. Aceptemos que se han asignado a las variables los siguientes valores de verdad: p es verdadero, q y r son falsos. Re-

presentemos ahora el ejemplo en forma de diagrama como un árbol invertido, para ver cómo los valores de verdad de las expresiones simples determinan el valor de verdad de la expresión compuesta. Disyunción, negación y equivalencia están abreviadas como 'Disj', 'Neg' y 'Eq' respectivamente; conjunción e implicación, igual que antes, como 'Conj' e 'Impl'.

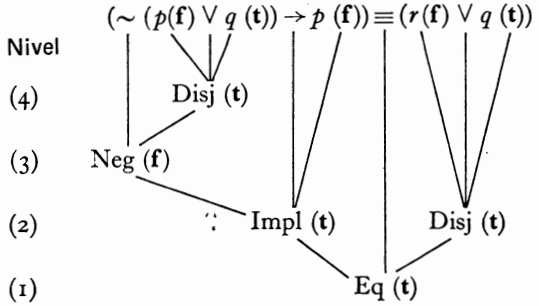
(4)



Las disyunciones de nivel (3) son ambas verdaderas, dado que al menos uno de los enunciados simples lo es. En el nivel (2) sólo la primera conjunción es verdadera, puesto que sus enunciados subordinados (uno de ellos, a su vez, compuesto) son verdaderos. La otra conjunción es falsa, pues uno de los enunciados que la forman es falso.

La implicación en el nivel (1) es falsa, puesto que su antecedente es verdadero y su consecuente falso. El valor de verdad de la expresión compuesta es, por lo tanto, f. Vale la pena hacer notar que al calcular el valor de verdad de la expresión compuesta hemos trabajado, por así decir, de dentro hacia fuera. Empezamos con los constituyentes menores, más internos, y terminamos con el mayor. ¡Los paréntesis de más adentro son lo primero! Quienes estén familiarizados con la gramática chomskyana en la versión de (1965) observarán que este principio se cumple también en las reglas cíclicas, en sintaxis y fonología, y en las reglas de proyección, en semántica. El ejemplo final es una equivalencia cuyo análisis dejamos como ejercicio al lector.

(5)



a *p* y *r* se les ha asignado **f**, mientras que a *r* le corresponde **t**.

4.7. TAUTOLOGIAS Y CONTRADICCIONES

Hay ciertas expresiones compuestas que siempre reciben el valor de verdad 'verdadero' independientemente de los valores de verdad asignados a los enunciados simples de la expresión. Tales expresiones tienen un interés especial en lógica, puesto que puede decirse que su valor de verdad está determinado totalmente por las propiedades veritativo-funcionales de las conectivas, es decir, por su forma lógica. Llamamos **tautologías** a este tipo de expresiones. Hay otras expresiones que tienen siempre el valor de verdad **f** como valor de verdad de la expresión entera. Son las llamadas **contradicciones.**

Las tautologías, por ser siempre verdaderas, son verdades lógicas. Hay, sin embargo, verdades lógicas que no son tautologías, como veremos luego. Del mismo modo que el concepto de verdad lógica es más amplio que el de tautología, el de verdad analítica es más amplio que el de verdad lógica (cfr. p. 25, más arriba).

La disyunción de un enunciado con su propia negación vale como ejemplo sencillo de tautología.

(1) $p \vee \sim p$ (Está lloviendo o no está lloviendo)

Sea cual sea el enunciado p y su valor de verdad, el valor de verdad de la expresión compuesta será siempre **t**; es decir, estamos ante una verdad lógica. Otra manera de plantear esta idea consiste en decir: 'Por mucho que el mundo cambie (sea el que sea el mundo que escojamos), *la luna es un pedazo de queso verde o no lo es*'. En otras palabras, el conjunto-verdad de una tautología es siempre el conjunto de todos los mundos posibles (el conjunto universal): es fácil ver que el conjunto de mundos posibles en que $p \vee \sim p$ es verdadero es la unión del conjunto de mundos en que p es verdadero y del conjunto de mundos en que $\sim p$ es verdadero, o lo que es lo mismo, el conjunto universal. Se puede decir de modo general que el conjunto-verdad de una tautología es el conjunto universal y que el conjunto-verdad de una contradicción es el conjunto vacío.

4.8. TABLAS DE VERDAD

Sería bueno tener un procedimiento mecánico para decidir si un enunciado es una tautología o no. En lógica de enunciados existe un procedimiento así. Es el **método de las tablas de verdad.**

Hemos usado este método, de modo parcial, al estudiar las propiedades veritativo-funcionales de las conectivas. Ahora vamos a ver cómo

se puede aplicar el método a enunciados compuestos con varias conectivas diferentes.

La finalidad del método es comprobar si un enunciado es tautológico, contradictorio o ninguna de las dos cosas. Por lo tanto, lo que queremos hacer es simplemente estudiar todas las combinaciones posibles de valores de verdad de los enunciados simples y analizar después la tabla de verdad que resulta para la expresión compuesta. En el caso de $p \vee \sim p$ hay dos posibilidades: o p es verdadero o p es falso. Si p es verdadero su negación es falsa y a la inversa.

Una disyunción de p y su negación ha de ser siempre verdadera, pues en cualquier caso uno de los dos elementos de la disyunción es verdadero. Si lo escribimos en forma de tabla de verdad, tenemos

(1)

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
t	f	t
f	t	t

(1) puede también escribirse en la forma (1')

(1')

p		$\sim p$
t	t	f t
f	t	t f

Si se tratara de dos variables, tendríamos cuatro posibilidades, si fueran tres las variables, habría ocho posibilidades (y, en general, hay 2^n posibilidades, siendo n el número de variables de enunciados distintas y 2, la base, el número de valores de verdad).

Estudiemos dos ejemplos más.

(2) $(p \,\&\, q) \rightarrow p$

p	q	$p \,\&\, q$	p	$(p \,\&\, q) \rightarrow p$
t	t	t	t	t
t	f	f	t	t
f	t	f	f	t
f	f	f	f	t

Sean cuales sean los valores de verdad que damos a los enunciados simples, tenemos un enunciado verdadero. Por lo tanto, (2) es una autología

(3) $(p \,\&\, q) \rightarrow (p \vee r)$

p	q	r	$p \,\&\, q$	$p \vee r$	$(p \,\&\, q) \rightarrow (p \vee r)$
t	t	t	t	t	t
t	t	f	t	t	t
t	f	t	f	t	t
t	f	f	f	t	t

p	q	r	$p \& q$	$p \vee r$	$(p \& q) \rightarrow (p \vee r)$
f	t	t	f	t	t
f	t	f	f	f	t
f	f	t	f	t	t
f	f	f	f	f	t

De nuevo se trata de una tautología, puesto que para todas las combinaciones posibles de valores de verdad de los constituyentes el valor de la expresión compleja es t.

No todos los enunciados en lógica proposicional son, sin embargo, tautologías.

(4) $\sim p \rightarrow (p \vee q)$

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim p \rightarrow p \vee q$
t	t	f	t	t
t	f	f	t	t
f	t	t	t	t
f	f	t	f	f

(4) no es tautología ni contradicción sino lo que antes hemos llamado un enunciado sintético: un enunciado cuyo valor de verdad depende de cómo sea el mundo. La propiedad característica de un enunciado sintético de t y f en la columna final bajo la conectiva principal de la expresión. Esto significa que el valor de verdad del enunciado compuesto depende de los valores de verdad de los enunciados constituyentes; y el valor de verdad de los enunciados simples depende, naturalmente, de cómo sea el mundo. Esta es la razón de que digamos que los enunciados que no son ni tautologías ni contradicciones, son enunciados sintéticos, es decir, enunciados cuyos valores de verdad están determinados por la configuración del mundo.

(5) $\sim (p \rightarrow (p \vee q))$

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$	$\sim (p \rightarrow (p \vee q))$
t	t	t	t	f
t	f	t	t	f
f	t	t	t	f
f	f	f	t	f

(5) es una contradicción. Todas las combinaciones posibles de valores de verdad dan el valor final f.

Las contradicciones del mismo tipo que (5) aclaran la relación entre contradicciones y tautologías. $p \rightarrow (p \vee q)$ es, como se puede comprobar, una tautología, mientras que $\sim (p \rightarrow (p \vee q))$ es una contradicción. Negando una tautología surge una contradicción, al igual que si negamos una contradicción, obtenemos una tautología.

La forma lógica de un enunciado, que en lógica de enunciados está determinada por las propiedades veritativo-funcionales de las conectivas, puede compararse con una máquina en la que si se introducen los valores de verdad de los enunciados simples, el producto son los valores de verdad del enunciado compuesto. Si la máquina da siempre **t**, independientemente del valor de verdad sobre el que ha operado, estamos ante una tautología.

Este operar mecánico de la forma lógica es consecuencia del hecho de que cada conectiva lógica relaciona de manera precisa cada posible combinación de valores de verdad con el valor de verdad del enunciado compuesto. Las relaciones estructurales entre enunciados que se estudian en lógica proposicional pueden, por lo tanto, entenderse como relaciones entre enunciados respecto de su valor de verdad. La función de una conectiva lógica es decidir, para cada combinación posible de valores de verdad, cual es el valor de verdad resultante para esa combinación. El valor de verdad de un enunciado compuesto queda unívocamente determinado por la conectiva lógica y las combinaciones posibles de valores de verdad de los enunciados simples.

Por lo tanto, es natural decir que las conectivas designan funciones que proyectan uno o varios valores de verdad en un valor de verdad y sólo en uno. Llamamos **funciones de verdad** a estas funciones.

Salvo en (3) hemos escogido siempre nuestros ejemplos de cálculo de los valores de verdad de tal modo que tuviéramos que manejar sólo dos variables. La razón es que el número de combinaciones posibles de valores de verdad crece exponencialmente con el número de variables de enunciado distintas; los cálculos se hacen entonces, en el mejor de los casos, aburridos. En expresiones con más de dos variables tenderemos, debido a ello, a usar el llamado **razonamiento indirecto** (llamado también, a menudo, **reductio ad absurdum).**

Para hacer un razonamiento indirecto procedemos como sigue. Suponemos que la expresión que nos interesa es falsa. Si este supuesto no conduce a una contradicción, sabemos que la expresión no es una tautología. La razón es que una tautología es siempre verdadera. Si es de alguna manera posible que la expresión que nos interesa sea falsa, la expresión no puede ser tautológica. Sin embargo, si nuestro supuesto de que la expresión es falsa conduce a una contradicción (es decir, no es posible que la expresión sea falsa), tenemos una tautología.

Una vez que hemos mostrado que el suponer que un cierto enunciado es falso no conduce a contradicciones, todavía queda por determinar si el enunciado es una contradicción o un enunciado sintético. Este problema suele quedarse sin resolver, puesto que, en lógica, lo que nos interesa primordialmente es saber si una expresión es una tautología o no. Si estamos interesados en el problema de determinar si un enunciado es una contradicción, invertimos simplemente el proceso de razonamiento: suponemos que el enunciado es verdadero y comprobamos si este supuesto lleva a una contradicción.

Veamos algunos ejemplos de razonamiento indirecto.

(6)

Nivel	$((p \vee q) \,\&\, r) \rightarrow p$
(1)	**f**
(2)	**t** **f**
(3)	**t** **t**
(4)	**f** **t**

En el nivel (1) suponemos que el valor de verdad de la expresión entera es **f**. La tabla de verdad de la implicación material nos dice que una implicación sólo puede ser falsa cuando su antecedente es verdadero y su consecuente falso, que es lo que se indica en el nivel (2). Las dos **t** en el en el nivel (3) son necesarias, según la tabla de verdad, para que la conjunción pueda tener el valor verdad **t** que se le ha atribuido en el el nivel (2). Una conjunción es verdadera sólo si los dos enunciados que la forman lo son. El nivel (4) está determinado por el hecho de que antes hayamos asignado **f** a p: una variable tiene siempre el mismo valor de verdad en cada asignación. Podemos, entonces, hacer uso del hecho de que la disyunción en el nivel (3) tiene el valor **t**. Según las condiciones de verdad de la disyunción, q ha de tener el valor **t**. Dado que no hemos llegado a una contradicción por suponer que (6) era falso, (6) no puede ser una tautología.

(7)

Nivel	$(((\sim p \rightarrow \sim (q \vee r)) \,\&\, (s \rightarrow r)) \,\&\, s) \rightarrow p$	
		f
(2)		**t** **f**
(3)		**t** **t**
(4)		**t** **t**
(5)	**t** $\mathbf{f}^1$ **t** **f**	$\mathbf{t}^2$ $\mathbf{t}^*$
(6)	**f** $\mathbf{f}^*$	Contradicción

Los valores asignados a p y s en el nivel (5) (marcados con los índices (1) y (2) respectivamente) son los que atribuyeron a estas variables en los niveles (2) y (3) respectivamente.

En este ejemplo dejamos que el lector mismo haga el razonamiento, inspirándose en su conocimiento de las propiedades veritativo-funcionales de las conectivas. Sólo diremos que, como es claro, en el ejemplo (7) termina apareciendo una contradicción (véanse las variables marcadas con *). Nos vemos obligados a suponer que r es falso y verdadero a la vez. Debido a esta contradicción hemos de admitir que (7) no puede ser falso. Por lo tanto es una tautología.

¿Cómo podemos operar con enunciados cuyas conectivas principales no son implicaciones? Si suponemos, por ejemplo, que una conjunción es falsa, hay que estudiar tres posibilidades. El método heroico consiste en analizar cada una de las posibilidades en el modo indicado más arriba. Existe, sin embargo, otra posibilidad. Podemos usar nuestro conocimiento de las equivalencias lógicas para transformar en implicaciones expresiones cuya conectiva principal no es una implicación. A continuación damos una lista de leyes lógicas muy conocidas, algunas de las cuales pueden usarse para pasar de una expresión lógica a una implicación equivalente, haciendo así más fácil la reducción al absurdo.

(8)

(i) $p \vee \sim p$
(ii) $\sim (p \,\&\, \sim p)$
(iii) $p \equiv p$
(iv) $(p \vee q) \equiv \sim (\sim p \,\&\, \sim q)$
(v) $(p \,\&\, q) \equiv \sim (\sim p \vee \sim q)$
(vi) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \,\&\, \sim q)$
(vii) $\sim (p \,\&\, q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
(viii) $(p \rightarrow q) \equiv \sim (p \,\&\, \sim q)$
(ix) $(p \,\&\, q) \equiv \sim (p \rightarrow \sim q)$
(x) $\sim (p \rightarrow q) \equiv (p \,\&\, \sim q)$
(xi) $\sim (p \,\&\, q) \equiv (p \rightarrow \sim q)$
(xii) $(p \vee q) \equiv (\sim p \rightarrow q)$
(xiii) $(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$
(xiv) $\sim \sim p \equiv p$
(xv) $p \equiv p \vee p$

Por medio de estas tautologías y equivalencias u otras similares[6] puede el lector modificar con facilidad una expresión de modo que adquiera una forma más fácil de manejar. Considérese

(9) $\sim (((p \,\&\, (q \vee \sim q)) \rightarrow p) \,\&\, \sim p)$

[6] Un tratamiento mucho más amplio de las autologías en lógica proposicional se puede encontrar en Kalish y Montague (1964) y Thomason (1970).

(9) tiene un aspecto realmente complicado, así que la transformamos en (10) usando (8) (xi).

(10) $$((p \,\&\, (q \vee \sim q)) \rightarrow p) \rightarrow \sim \sim p$$

Finalmente tenemos una implicación sobre la que podemos intentar un razonamiento indirecto. Si transformamos (10) en (11):

(11) $$((p \,\&\, (q \vee \sim q)) \rightarrow p) \rightarrow p$$
$$\mathbf{f\ f\ \ t\ t\ f\ \ t\ \ t\ f\ f\ f}$$

y hacemos una reductio ad absurdum, vemos que (9) no es una autología.

EJERCICIOS

1. ¿Cuál de los tres enunciados siguientes no puede formalizarse en lógica de enunciados del mismo modo que los otros dos? ¿Por qué?
   (*a*) Luis y Ricardo son comuneros
   (*b*) Luis y Ricardo son parientes
   (*c*) A Luis y Ricardo les gusta beber

2. Inténtese representar los siguientes enunciados con variables de enunciado y conectivas lógicas.
   (*a*) Si esto es verano, que venga Dios y lo vea
   (*b*) Los limones son bonitos pero amargan
   (*c*) Puedes si quieres
   (*d*) Vendrá hoy o mañana, pero no más tarde
   (*e*) Si no existen ni Dios ni el demonio, es difícil ser religioso
   (*f*) Echa al gato o me voy

3. Indique los valores de verdad de las siguientes expresiones compuestas partiendo del supuesto de que p y q son verdaderos y r es falso.
   (*a*) $\sim p$
   (*b*) $\sim (p \,\&\, r)$
   (*c*) $\sim (p \vee q)$
   (*d*) $p \vee (q \,\&\, r)$
   (*e*) $r \rightarrow ((q \,\&\, r) \vee (p \vee q))$
   (*f*) $r \equiv (p \,\&\, r)$

4. ¿Qué expresiones, entre las siguientes, son tautologías?
   (*a*) $\sim (p \,\&\, \sim p)$
   (*b*) $(p \vee q) \rightarrow p$
   (*c*) $\sim (p \,\&\, q) \equiv \sim p \vee \sim q$
   (*d*) $\sim ((p \equiv q) \equiv (p \equiv \sim q))$
   (*e*) $(p \rightarrow \sim q) \vee (q \rightarrow \sim p)$
   (*f*) $((p \equiv q) \equiv p) \equiv q)$
   (*g*) $(p \,\&\, q) \vee (p \equiv \sim q)$
   (*h*) $(p \vee (q \,\&\, r)) \equiv ((p \vee q) \,\&\, (p \vee r))$

5. ¿Puede considerarse función de verdad la conectiva *porque*? Razónese la respuesta.

6. El término **notación polaca sin paréntesis** significa que una conectiva se escribe a la izquierda de los enunciados que afecta en vez de, como es usual, entre ellos. En este caso las conectivas se suelen abreviar como sigue: N = disyunción (adyunción), K = conjunción, C = implicación (condicional), E = equivalencia.

   Ejemplos:

Notación normal	Notación polaca
$\sim p$	Np
$p \,\&\, q$	Kpq
$p \rightarrow q$	Cpq
$(p \rightarrow q) \,\&\, p$	KCpqp
$(p \,\&\, q) \vee (p \,\&\, r)$	AKpqKpr

   Escríbanse ahora las siguientes expresiones en notación polaca.
   (*a*) $p \vee q$
   (*b*) $\sim p \equiv q$
   (*c*) $(p \vee q) \equiv (p \,\&\, q)$

7. Escribir las siguientes expresiones en notación normal
   (*a*) KpNq
   (*b*) CAKE$pqrst$
   (*c*) ECpqCNqNp

8. Determinar, por razonamiento indirecto, si las siguientes expresiones son tautologías.
   (*a*) $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow (t \rightarrow p))))$
   (*b*) $((p \equiv q) \,\&\, (q \equiv r)) \rightarrow (p \equiv r)$
   (*c*) $(p \,\&\, (q \equiv r)) \rightarrow ((p \,\&\, q) \equiv r)$

5

Lógica de predicados

5.1. AMPLIACION DEL ANALISIS LOGICO

Hemos visto, en el capítulo de lógica de enunciados, que se puede decidir si una inferencia es correcta o un enunciado verdadero (tautológico) por medio del uso de técnicas como la de las tablas de verdad.

Hay sin embargo muchas inferencias en el lenguaje natural que intuitivamente son correctas, pero cuya corrección no puede justificarse en el marco de la lógica de enunciados, por ejemplo (1).

(1) Si todos los alces son listos y Bruce es un alce, entonces Bruce es listo

Todo el mundo aceptaría como correcto un razonamiento de este tipo y sin embargo su validez no puede justificarse en lógica de enunciados. (1) se analizaría en lógica proposicional como $(p \,\&\, q) \rightarrow r$, expresión que es cualquier cosa menos tautológica como se ve por su tabla de verdad. Por el contrario, la lógica de predicados nos ofrece un instrumento con el que podemos mostrar que el razonamiento (1) es lógicamente correcto. Podemos decir, de un modo general, que la lógica de predicados nos lleva de las relaciones lógicas entre enunciados a las relaciones lógicas que se dan en el interior de los enunciados.

Examinemos ahora con más detalle cómo podemos mostrar la validez de (1). Empecemos con un enunciado simple.

(2) Bruce es un alce

Este enunciado dice algo acerca de un individuo. El individuo es Bruce

y se dice de él que tiene la propiedad de ser un alce. Este tipo de enunciado se llama enunciado predicativo (se predica algo, por ejemplo una propiedad, de un individuo).

Las correspondientes estructuras lingüísticas, sintagma nominal y sintagma verbal, pueden ayudarnos en cierta medida a desarrollar las intuiciones pertinentes en este contexto.

Los siguientes enunciados tienen la misma forma lógica que (2), puesto que predican algo de un individuo.

(3) El oso está dormido
El Rey Canuto se rindió
Olaf era un vikingo
El Este es rojo

Simbolizamos los sujetos en los enunciados anteriores por medio de *a, b, c, d...* Estos símbolos se llaman **constantes de individuo** (letras latinas minúsculas). Los predicados de los enunciados los simbolizamos con *A, B, C, D...* Estos símbolos se llaman **constantes de predicado** o simplemente **predicados** (letras latinas minúsculas).

Ahora podemos simbolizar (2) en lógica de predicados. Por mor de la brevedad, atribuimos la letra *b* a Bruce y la letra *M* a la propiedad de ser un alce. El enunciado se presenta como sigue. Téngase en cuenta que, por convención, el predicado se coloca al principio de la expresión.

(4) $M(b)$

En (4) hablamos de un cierto individuo, Bruce, y de una cierta propiedad, la de ser un alce, y decimos que Bruce tiene la propiedad de ser un alce. Podemos también formar la siguiente expresión.

(5) $M(x)$

En (5) x no es una constante de individuo sino una **variable de individuo.** Esto significa que x no está en lugar de un individuo concreto sino de un individuo cualquiera (o, dicho de otro, en lugar de un individuo arbitrariamente elegido). Tal como está escrito, (5) no expresa ninguna proposición. Esta es la razón de que (5) no sea considerado, en lógica, como enunciado sino como **enunciado abierto** (véase en la pág. 65 una discusión más amplia de esta noción).

Podemos dar un paso más en la escala de abstracción y formar la siguiente expresión.

(6) $\Phi(x)$

En esta fórmula tenemos no sólo una variable de individuo sino también

una **variable de predicado,** Φ (la mayúscula griega phi). Una variable de predicado nos remite no a una propiedad concreta sino a una propiedad cualquiera (una propiedad indeterminada).

Tal como está escrita, (6) puede considerarse una expresión sin sentido. Indica la posibilidad de predicar una propiedad cualquiera de un individuo cualquiera. No se hace ninguna afirmación de existencia. Sin embargo, como veremos luego, las expresiones del tipo de (6) pueden utilizarse en lógica para ciertos fines.

Constantes y variables de individuos se suelen agrupar bajo el nombre común de **términos de individuo.** Del mismo modo, variables y constantes de predicado se agrupan bajo el nombre de **términos de predicado.**

Se puede decir que los enunciados que aparecen en (2) y (3) tienen la misma estructura o forma lógica. Están formados por un término de predicado seguido de un término de individuo. Tienen, por lo tanto, la forma lógica representada en (7).

(7) $P(t)$

Ni qué decir tiene que no todos los enunciados tienen la forma lógica de (7). Los siguientes enunciados, por ejemplo, tienen otra forma lógica.

(8) Thor robó el martillo
Wotan admira a Thor
Dios creó el mundo
Wotan es más sabio que Dios

En estos enunciados aparecen predicados con dos argumentos. **Argumento** es un término que se emplea para referirse, entre otras cosas, a lo que en gramática se llama sujeto u objeto. Los términos de individuo que siguen al predicado en una expresión de la lógica de predicados se llaman argumentos del predicado. Si un predicado lleva un sólo argumento, se llama unario; si dos, binario; si tres, ternario, etc. Ejemplifiquemos esta terminología en (9).

(9)

$P(t)$	predicado unario (o monádico)
$P(t_1, t_2)$	predicado binario (o diádico)
$P(t_1, t_2, t_3)$	predicado ternario
$P(t_1, t_2, t_3, t_4)$	predicado cuaternario
$P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$	predicado n-ario

Dado que los predicados en (8), *robó, admira, creó* y *es más sabio que,* llevan cada uno uno dos argumentos, son predicados binarios. Los enunciados en (8) tienen, por lo tanto, la forma lógica $P(t_1, t_2)$. Los enunciados de (10) pueden formalizarse como $P(t_1, t_2, t_3)$, es decir, contienen predicados ternarios. Los argumentos están subrayados.

(10) Juan le dio a Juana la manzana
El guía mostró Gothenburg al turista
Wotan ofreció cerveza a Thor

No es fácil encontrar enunciados en el lenguaje natural que tengan predicados con más de tres argumentos sin entrar en cuestiones controvertidas. El siguiente enunciado podría considerarse, sin embargo, como un ejemplo de uso de un predicado con cuatro argumentos.

(11) Juan le compró a Juana un reloj por cinco libras esterlinas

En los anteriores enunciados vemos que los predicados en las fórmulas lógicas corresponden con bastante exactitud a los predicados del análisis gramatical. Para un lógico es, sin embargo, una cuestión sin mayor interés la de si un predicado lógico corresponde a una palabra o expresión simple en el lenguaje natural. Desde el punto de vista lógico expresiones muy complejas como *toma el aperitivo los domingos por la manaña entre 11 y 12 o es un lingüista de pelos largos que se interesa por la relación entre la lógica modal y la dialectología* pueden considerarse predicados en una fórmula lógica. Esto implica que un enunciado como *Thor robó el martillo* no tiene necesariamente que analizarse como $F(a, b)$, es decir, como un predicado binario, sino que puede analizarse también, en principio, como $F(a)$, con un predicado unario, interpretando F como el predicado *robó el martillo,* aunque el primer tipo de análisis sea el más natural desde un punto de vista lingüístico.

5.2. CUANTORES

Volvamos a la primera parte del primer ejemplo de este capítulo.

(1) Todos los alces son listos

Si analizáramos este enunciado del mismo modo que los otros enunciados del capítulo tendríamos

(2) C(todos los alces)

del mismo modo que

(3) C(Bruce)

En el caso de (2) el problema es que no podemos sustituir la expresión *todos los alces* por una constante de individuo. *Todos los alces* no se refiere a un individuo y en cambio el nombre *Bruce,* sí. Lo que afirma (2) en realidad es que si encontramos un alce, podemos esperar que sea

listo. Dicho de otro modo: escoja un alce cualquiera y encontrará que es listo.

Introducimos un nuevo tipo de constante lógica con el fin de analizar enunciados del mismo tipo que (1): el **cuantor universal,** con el significado 'todo(s)' 'cada' o 'para todo(s) vale que'. El cuantor universal se representa por el símbolo $\forall$. Un enunciado como el heráclito 'todo fluye' se formaliza de la siguiente manera por medio del cuantor universal.

(4) $\forall x\, F(x)$

(4) se puede leer como 'Para todo x, x fluye'. De modo similar, (1) se puede analizar por medio de (5).

(5) $\forall x\, (M(x) \rightarrow C(x))$

Esta expresión puede leerse de cualquiera de los modos siguientes.

(6)
- **(a)** Para todo x, si x es un alce, entonces x es listo
- **(b)** Vale decir de todo objeto que si es un alce, entonces es listo
- **(c)** Si algo es un alce, entonces es listo
- **(d)** Todos los alces son listos

Para entender la función de fórmulas como (5), es importante saber qué es una variable. La x en $\forall x$ está por cualquier individuo en el universo del discurso. Es una variable que se refiere a los objetos e individuos del universo: su **rango** está constituido por todos los objetos e individuos del universo.

El rango no necesita estar constituido por todos los objetos del universo en que vivimos, aunque este sea el caso en el ejemplo anterior. En un libro de matemáticas el rango puede ser el conjunto de los números y en un libro de sociología, el conjunto de los seres humanos, etc. En este contexto se usa el concepto de **universo del discurso,** es decir, todos los objetos de que se habla en un cierto contexto. Este concepto se introdujo en el capítulo 2.

Para lograr una mejor comprensión de la diferencia entre enunciados simples como $F(b)$ (Bruce fluye) y enunciados cuantificados como $\forall x\, F(x)$, volvemos al concepto de enunciado abierto. Un enunciado abierto es una expresión de la forma (7)

(7) $F(x)$ (léase 'x fluye')

Dado que x es una variable que no se refiere a ningún individuo en concreto, no podemos decir con sentido que $F(x)$ exprese una proposición o que haga una afirmación. No se puede decir que un enunciado abierto

es verdadero o falso. Un enunciado simple como *Bruce fluye,* por el contrario, es siempre verdadero o falso, tiene un valor de verdad. ¿Cómo podría contestarse a la pregunta de si x fluye? La única respuesta posible sería 'depende de qué o quién sea x'. Si x se refiere al Támesis, entonces es verdad, pero si x se refiere al Rey Canuto, probablemente es falso que x fluya. Decir que el Rey Canuto no satisface el enunciado abierto $F(x)$ es equivalente a decir que $F(c)$, en donde c se refiere al Rey Canuto, es enunciado falso.

Un modo de construir un enunciado partiendo de un enunciado abierto es asignar un cierto valor a la variable. Como hemos indicado más arriba, el modo de hacerlo es sustituir la variable en la expresión por una constante de individuo. Los enunciados abiertos se llaman también **funciones enunciativas.** Entendemos a qué se alude con este término si pensamos el enunciado abierto como una función que toma individuos como argumentos y diferentes enunciados como valores de verdad. Otro modo de crear un enunciado, partiendo de un enunciado abierto, es colocar un cuantor seguido de una variable al principio del enunciado abierto. Por este método, partiendo de (7), conseguimos el enunciado del principio.

(8) $\forall x\, F(x)$ 'Todo fluye'

(8) afirma que todos los objetos en el universo del discurso satisfacen la función enunciativa $F(x)$. Esto es obvio. Si hubiera un objeto en el universo del discurso, pongamos a, que no satisfaciera la función enunciativa, el enunciado 'Todo fluye' sería falso. Por lo tanto, si $F(a)$ es un enunciado falso, el enunciado $\forall x F(x)$ es también falso, dado que a es un elemento del rango de x (es decir, dado que a pertenece al universo del discurso).

Es importante tener en cuenta que se cuantifican enunciados abiertos y no enunciados. Cuantificar enunciados produce extraños resultados.

(9) $\forall x\, F(b)$

(9) se leería como sigue 'Para todo x, Bruce fluye', expresión que, claramente, no tiene sentido.

De todos modos este tipo de cuantificación, llamado **cuantificación vacía,** se admite en la mayoría de los libros de lógica, puesto que por un lado no afecta al significado y por otro simplifica las reglas sintácticas. (9) se interpreta entonces como equivalente al enunciado simple $F(b)$. Desde un punto de vista lingüístico, la cuantificación vacía tiene tiene poco o ningún contenido intuitivo y las reglas sintácticas que damos más abajo no la admitirán.

Los enunciados abiertos pueden presentar estructuras más compleja que la de los enunciados predicativos simples. Así en (10), por ejemplo.

(10) $M(x) \rightarrow C(x)$ 'Si x es un alce, entonces x es listo'

Si partimos de (10), le ponemos paréntesis y un cuantificador delante, conseguimos un enunciado.

(11) $\forall x\,(M(x) \rightarrow C(x))$

Hay que tener en cuenta que aunque podemos escoger cualquier individuo como valor de la variable x, hay que mantener ese mismo individuo como valor de x en las dos expresiones $M(x)$ y $C(x)$, cuando aparecen dentro de los mismos paréntesis, como es el caso en (11). Decimos que el cuantor **liga** las equis en $M(x)$ y $C(x)$.

El **alcance** de cuantor es la expresión dentro de los paréntesis que le sigue inmediatamente (cfr. el parágrafo sobre el alcance en lógica proposicional, pág. 47).

Una variable ligada por un cuantor es una **variable ligada.** Las variables que no están ligadas se llaman **variables libres,** como ocurre con la última aparición de x en (12), por ejemplo.

(12) $\forall x\,(F(x) \rightarrow L(x)) \,\&\, K(x)$

En (13), por el contrario, la variable correspondiente está ligada

(13) $\forall x(F(x) \rightarrow (L(x) \,\&\, K(x)))$

Esto significa que el valor de x en $K(x)$ en (12) es independiente del valor de las equis que aparecen dentro de los paréntesis. Este no es, sin embargo, el caso para la segunda expresión. En (12), $K(x)$ se puede sustituir por $K(y)$ sin cambiar el significado de la expresión. En (13) no se puede hacer una sustitución similar. Las expresiones lógicas que contienen variables libres no constituyen enunciados sino enunciados abiertos.

Dentro del alcance de un cuantor cada una de las variables está siempre por un único individuo.

En (14) aparecen una serie de expresiones lógicas en las que el alcance de cada cuantor está subrayado. No nos interesa aquí qué significan esas expresiones ni a qué se refieren los predicados. El fin de las expresiones es familiarizar al lector con los conceptos de 'alcance', 'variable ligada', 'variable libre' y 'enunciado abierto'.

(14)

(a) $F(a) \vee \underline{\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x, a))} \,\&\, \underline{\forall x\,(G(x, a))}$

(b) $\underline{\forall x\,(K(x) \rightarrow F(y) \,\&\, G(x, a)))}$

(c) $\underline{\forall y\,\underline{\forall x\,(K(x) \rightarrow (F(y) \,\&\, G(x, a)))}}$

(d) $\underline{\forall x\,((K(x) \,\&\, F(a)) \rightarrow \underline{\forall y\,(G(x, y) \vee G(y, y))} \,\&\, \underline{\underline{\forall z\,(F(z) \rightarrow G(z, y)))}}}$

(14) (a) no es un enunciado abierto, puesto que no aparece en él ninguna variable libre. (14) (b) es un enunciado abierto, dado que contiene una variable libre, a saber, la y de $F(y)$. (14) (c) es un enunciado con dos cuantores cuyo alcance se superpone. (14) (d) muestra una expresión con tres cuantores. El alcance de dos de ellos está dentro del alcance del primero. (14) (d) no es un enunciado sino un enunciado abierto, puesto que la última variable de la expresión no está ligada por ninguno de los cuantores.

En castellano se pueden formar una infinidad de enunciados que no contienen el cuantor *todo* (*cada*) sino otra palabra que opera como un cuantor: *uno, dos, tres, algunos, ninguno, varios, muchos* y *pocos*. Todos los elementos de la categoría gramatical de los pronombres indefinidos se pueden considerar, en cierto modo, como cuantores.

En lógica, normalmente, basta con aceptar dos cuantores. Estos dos cuantores tienen las dos características siguientes. Son importantes para la formalización de las matemáticas y sus propiedades lógicas son relativamente simples. El primero de ellos es el cuantor universal, que hemos estudiado más arriba.

El segundo es el llamado **cuantor existencial.** Se escribe $\exists$ y significa, grosso modo, 'algo/alguien' o 'hay algo/alguien'. Los siguientes ejemplos muestran cómo se usa este cuantor.

(15) (a) Alguien es conservador $\exists x\, C(x)$
(b) Existe un unicornio $\exists x\, U(x)$
(c) Hay alguna chica más simpática que Pepa $\exists x\, (G(x) \,\&\, S(x, a))$

donde C está por 'conservador'
U 'ser un unicornio'
S 'ser más simpático que'
G 'ser una chica'
a Pepa

(15) muestra cómo es posible representar por el cuantor universal expresiones castellanas bastante diferentes. La mejor manera de leer $\exists x$ en una expresión lógica es 'Hay un x tal que...' o, para ser más precisos, 'Hay por lo menos un x tal que...'. El cuantor existencial indica que al menos un objeto del universo del discurso satisface el enunciado abierto que sigue al cuantor.

Las expresiones lógicas en (15) se leerían del modo siguiente.

(16) (a) Hay al menos un x tal que x es conservador
(b) Hay al menos un x tal que x es un unicornio
(c) Hay al menos un x tal que x es una chica y x es más simpático que Pepa

Enunciados como los de (16) son 'traducciones inversas', símbolo a símbolo, de las expresiones en (15) al castellano y por ello suenan más bien torponas.

Los cuantores universal y existencial funcionan, en ciertos aspectos, de manera diferente. Una de las cosas que le parecen extrañas al que comienza a estudiar lógica es el modo en que se representan los dos enunciados castellanos siguientes:

(17) Todas las mozas son guapas $\forall x\,(M(x) \rightarrow P(x))$

(18) Alguna moza es guapa $\exists x\,(M(x)\ \&\ P(x))$

La única diferencia entre (17) y (18) parece consistir en que contienen cuantores diferentes. Si miramos, en cambio, las representaciones lógicas de estos enunciados, vemos que no sólo tienen diferentes cuantores sino que también contienen conectivas lógicas diferentes. Al principio esto puede parecer extraño, pero es fácil mostrar que sería imposible cambiar las conectivas lógicas en (17) y (18).

La representación lógica de (17) contiene una implicación. Si se cambia la implicación por una conjunción, tenemos (19).

(19) $\forall x\,(M(x)\ \&\ P(x))$

(19) afirma que todo individuo en el universo del discurso es una moza y es guapa. Así pues, (17) y (19) no son equivalentes. (17) no excluye la posibilidad de que existan algunos mozos feos en el universo del discurso, como lo hace (19). Esto significa que (19) no es una representación correcta del significado del enunciado (17).

(18) contiene una conjunción. Si se cambia la conjunción por una implicación, tenemos (20).

(20) $\exists x\,(M(x) \rightarrow P(x))$

(20) afirma que hay al menos un x en el universo del discurso tal que si x fuera una moza, entonces x sería guapa. (20) es verdadero si hay algún objeto en el universo del discurso que no sea una moza (esto se debe a la definición de la implicación material en lógica). (18) no es verdadero en tales circunstancias. Además (20) no implica que existan mozas en el universo del discurso, mientras que (18), sí. Es claro, entonces, que (18) y (20) no son equivalentes y que (20) es una representación incorrecta del significado de (18).

Desde un punto de vista lingüístico, tanto la representación lógica de (17) como la de (18) no parecen totalmente intuitivas. (21) y (22) son representaciones lógicas de (17) y (18) más satisfactorias lingüísticamente.

(21) $\forall x \quad P(x)$ 'para toda moza x, x es guapa
$x \in M$

(22) $\exists x \underset{x \in M}{} \quad P(x)$ 'para alguna moza x, x es guapa'

En estas expresiones hemos usado lo que habitualmente se llama **cuantificación restringida.** La expresión que está debajo del cuantor indica el rango de la cuantificación, en este caso, el conjunto de las mozas. M está por el conjunto de las mozas y $\in$ es la relación 'elemento de' de la teoría de conjuntos. (21) y (22) ponen de manifiesto el paralelismo entre los dos enunciados, cosa que no ocurre en las representaciones lógicas de (17) y (18). La única diferencia entre (21) y (22) estriba en la elección del cuantor. Escribiendo el rango de la cuantificación como un suscrito evitamos usar conectivas diferentes en el interior de las expresiones. La cuantificación restringida no se usa habitualmente en lógica, pero se puede incluir a fin de lograr un análisis más adecuado del lenguaje natural.

En una expresión lógica puede haber más de un cuantificador. Así, por ejemplo, (23) es una expresión bien formada de la lógica de predicados.

(23) $\forall x \; \exists y \; \forall z \; R(x, y, z)$

Cuando hay más de un cuantor delante de un enunciado abierto, el orden en que están escritos no es arbitrario, puesto que es ese orden lo que indica el alcance de cada uno respecto de los demás.

Comparemos las dos expresiones siguientes, en donde $F(x, y)$ está por 'x es el padre de y'.

(24) $\forall y \; \exists x \; F(x, y)$ 'para todo y, hay un x tal que x es el padre de y'

(25) $\exists x \; \forall y \; F(x, y)$ 'hay un x, tal que, para todo y, x es el padre de y'

La única diferencia entre estos dos enunciados es que el cuantor existencial está dentro del alcance del cuantor universal en (24), mientras que en (25) ocurre al revés. Esto influye de manera considerable en el significado de los enunciados. En castellano ortodoxo, (24) significa 'Todo el mundo tiene padre', cosa que parece razonable. (25), en cambio, significa 'Alguien es padre de todo el mundo', lo que ya no parece tan razonable.

En (24) se dice que sea cual sea el individuo que consideramos, es siempre posible encontrar algún individuo que es su padre. En (25) se afirma que hay un individuo tal que, dado un individuo cualquiera, el primero es el padre del segundo. Esto puede sonar un poco enrevesado, pero ahora veremos un modo de aclarar estas diferencias.

Hay enunciados en castellano, como 'todo el mundo admira a alguien', que son ambiguos precisamente en dependencia del alcance del cuantor. Los diferentes sentidos de estos enunciados corresponden a expresiones

diferentes en la lógica de predicados. El enunciado que hemos mencionado antes tiene dos lecturas. *A* está por 'admira' en las expresiones que siguen.

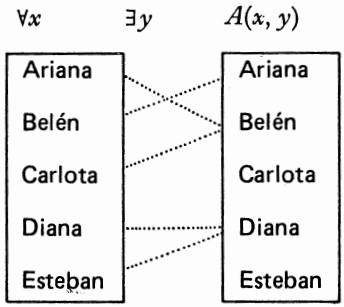
(26) $\forall x \exists x A(x, y)$ 'todo el mundo tiene alguien a quien admira'

(27) $\exists y \forall x A(x, y)$ 'hay alguien a quien todo el mundo admira'

Para ver cómo funciona el alcance del cuantor vamos a considerar un universo del discurso pequeño, pongamos, cinco individuos. Supongamos que el universo del discurso contiene los individuos Ariana, Belén, Carlota, Diana, Esteban. El rango de los cuantores es el conjunto de estos cinco individuos.

Estudiaremos primero (26). Debajo de los cuantores ponemos el rango de las variables. Las líneas de puntos indican que el primer individuo admira al segundo.

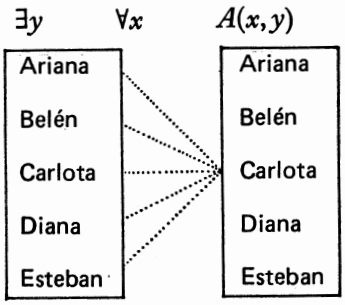
(26′)



(26) dice que es posible encontrar, para cada individuo del primer conjunto, un individuo en el segundo conjunto tal que el primero admira al segundo. Esto es lo que indican las líneas en (26′). Cada uno de los individuos en el universo del discurso admira a alguien del universo del discurso.

(27) ha de entenderse de diferente manera. Este enunciado dice que es posible encontrar a alguien en el universo del discurso que es admirado por todos, tal como se pone de manifiesto en (27′).

(27′)



Ahora se ven con claridad las diferencias entre (26) y (27). Lo importante de (26′) es que encontramos que, para cada individuo en el primer conjunto, hay un individuo en el segundo al que aquél admira. Los individuos en el primer conjunto pueden admirar a individuos diferentes en el segundo conjunto, pero cada uno de ellos ha de admirar a alguien en el segundo conjunto. Lo importante de (27′) es que todos los individuos del primer conjunto admiran al mismo individuo en el segundo. Como se ve en (27′) todos admiran a Carlota.

Todavía hay que apuntar una cosa más. (27) seguiría siendo verdadero si, por ejemplo, Ariana admirara a Belén además de admirar a Carlota. Lo que importa es que todos admiren a Carlota.

El enunciado (27) implica el nunciado (26), pero (26) no implica (27). Esto se ve a partir del esquema anterior. Si todo el mundo admira al mismo individuo, ha de ser verdad que todo el mundo admira a alguien. En otras palabras,

$$\exists y \, \forall x \, F(x, y) \rightarrow \forall x \, \exists y \, F(x, y)$$

pero no

$$\forall x \, \exists y \, F(x, y) \rightarrow \exists y \, \forall x \, F(x, y).$$

Las ambigüedades de alcance que se producen en nunciados que contienen dos cuantores son interesantes lingüísticamente. A menuo sucede que la entonación cambia un enunciado potencialmente ambiguo en uno que no lo es. Un ejemplo de este fenómeno es el siguiente verso de una canción que fue popular hace algunos años: *Everybody loves somebody sometime* (Todo el mundo ama a alguien alguna vez). Si se conoce la canción, se estará de acuerdo en que el enunciado sólo se puede entender de tal modo que el cuantor universal tenga el alcance más amplio.

Otro rasgo de los cuantores que ha sido ampliamente discutido por los lingüistas es el siguiente. El orden de los cuantores en un enunciado castellano corresponde a menudo al orden que damos a los cuantificadores en la representación lógica del significado de ese enunciado. Comparemos los enunciados siguientes.

(28) (a) Todos los que están en esta habitación hablan dos idiomas.
(b) Hay dos idiomas que son hablados por todos los que están en esta habitación.

(28) (a) favorece claramente una lectura en la que el cuantor universal tenga el alcance más amplio. (28) (b), por el contrario, inclina a la lectura en la que la expresión 'hay dos lenguajes' tiene más amplio alcance. Puede ser que ambas expresiones sean ambiguas, pero es claro que, en cada caso, se prefiere la lectura cuya representación lógica presenta los

cuantores en el mismo orden que en castellano. Dado que la transformación pasiva, que se usa para relacionar (28) (a) con (28) (b), se entiende como transformación que no afecta al significado, los pares de enunciados del mismo tipo que (28) presentan un problema para el lingüista. Pares de enunciados como los de (28) se mencionan ya en Chomsky (1957).

Un problema similar lo crean pares de enunciados como los siguientes.

(29) (a) Alguien no explicó la situación
(b) La situación no fue explicada por alguien [1]

Lo relevante aquí no es el orden de los cuantores sino la posición de la negación con respecto a los cuantores. Para muchos hispano-hablantes (29) (b) es ambiguo y tiene las dos lecturas siguientes, entendiendo *E* por 'explicar' y 's' por situación.

(30) (a) $\sim \exists x\, E(x, s)$ 'no hay un x tal que x explicara s'
(b) $\exists x \sim E(x, s)$ 'hay algún x tal que x no explicó s'

(30) (a) dice que nadie explicó la situación. (30) (b) dice que no todo el mundo explicó la situación: alguien lo hizo y alguien, no. (29) (b) puede entenderse de las dos maneras, pero (29) (a) probablemente sólo puede entenderse en el sentido de (30) (b). Y sin embargo (29) (b) se relaciona con (29) (a) por medio de la transformación pasiva.

Abandonamos por el momento las ambigüedades del alcance del cuantificador con estos ejemplos, aunque encontraremos de nuevo ocasión de tratarlas en el capítulo de lógica modal.

Hasta el momento hemos tratado primordialmente la sintaxis de la lógica de predicados, es decir, el modo cómo se construyen las expresiones de este tipo de lógica. Antes de tratar su semántica, haremos un resumen de la sintaxis.

5.3. RESUMEN DE LA SINTAXIS DE LA LOGICA DE PREDICADOS

El fin de la sintaxis es determinar qué expresiones han de considerarse bien formadas en lógica. Aunque en este libro tratemos la lógica de enunciados en apartado distino al de la lógica de predicados, es claro que esta última contiene a aquella como parte propia.

---

[1] Los ejemplos de la edición inglesa son:
(29) (a) Everyone did not explain the situation.
(b) The situation wasn't explained by everyone.
La modificación introducida pretende reproducir la ambigüedad original, que parece perderse en una traducción literal. Las líneas subsiguientes se modifican en el mismo sentido. (N. del T.).

Primero damos una lista de categorías de la lógica de predicados.

(1)

(a) constantes de individuo	*a, b, c, d...*
(b) variables de individuo	*x, y, z...*
(c) constantes de predicado	*A, B, C, D...*
(d) variables de predicado	Φ, Ψ, X
(e) variables de enunciado	*p, q, r...*
(f) cuantores	$\exists$, $\forall$
(g) conectivas lógicas	$\sim$, & $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$
(h) paréntesis	( )

Las expresiones de la lógica de predicados se construyen a partir de este vocabulario. Al dar la sintaxis de la lógica de enunciados introdujimos metavariables para hablar acerca de los enunciados del lenguaje objeto. Del mismo modo, introducimos metavariables para hablar de las expresiones del nuevo lenguaje objeto, la lógica de predicados. Se necesitan las siguientes metavariables: P para los términos de predicado, t_1, t_2 ... t_n para los términos de individuo y α, β... para las expresiones bien formadas.

Las reglas sintácticas siguientes definen las expresiones bien formadas de la lógica de predicados.

(2)

(a) Toda variable de enunciado es una expresión bien formada.

(b) Si t_1 es un término de individuo (constante o variable) y P es un predicado unario, entonces $P(t_1)$ es una expresión bien formada.

(c) Si t_1 y t_2 son términos de individuo y P es un predicado binario, entonces $P(t_1, t_2)$ es una expresión bien formada.

(d) Si $t_1, t_2 \ldots t_n$ son términos de individuo y P es un predicado n-ario, entonces $P(t_1, t_2 \ldots t_n)$ es una expresión bien formada.

(e) Si x es una variable de individuo y α una expresión bien formada en la que x aparece como variable libre, entonces $\exists x\, \alpha$ es una expresión bien formada.

(f) Si x es una variable de individuo y α una expresión bien formada en la que x aparece como variable libre, entonces $\forall x\, \alpha$ es una expresión bien formada.

(g) Si α y β son expresiones bien formadas, entonces (i) $\sim \alpha$, (ii) $(\alpha \,\&\, \beta)$, (iii) $(\alpha \vee \beta)$, (iv) $(\alpha \rightarrow \beta)$ y (v) $(\alpha \equiv \beta)$ son expresiones bien formadas.

h) Toda expresión bien formada que no contiene variables libres es un enunciado.

(i) Sólo las expresiones construidas de acuerdo con estas reglas son expresiones bien formadas.

Nótese la diferencia entre enunciados y expresiones bien formadas. Tanto los enunciados como los enunciados abiertos son expresiones bien formadas. Las expresiones construidas según las reglas (2) (a-d) se llaman expresiones simples o atómicas. Las expresiones bien formadas construidas según las reglas (2) (e-g) son llamadas expresiones compuestas de la lógica de predicados.

5.4. SEMANTICA DE LA LOGICA DE PREDICADOS

Saber el significado de un enunciado declarativo es saber cómo sería el mundo si el enunciado fuera verdadero. Un hispanohablante puede decidir si el enunciado *Está lloviendo* es verdadero en cierto mundo posible, si sabe cómo es el mundo en cuestión. Este hecho es el punto de partida de la semántica lógica.

Esto, sin embargo, no es suficiente: necesitamos saber también cómo se relacionan los términos del lenguaje con el mundo. Para saber si el enunciado *Wotan es bueno* es verdadero en cierto mundo posible, necesitamos saber a qué individuo se refiere el nombre *Wotan*. Si tenemos un lenguaje y definimos qué relación guarda con el mundo cada expresión del lenguaje, tenemos una *interpretación* de ese lenguaje. El lenguaje puede ser un lenguaje formal como la lógica de predicados o un lenguaje natural como el castellano. A continuación veremos cómo se relacionan las expresiones de la lógica de predicados con el mundo. Dicho brevemente, una interpretación relaciona el lenguaje con el mundo (o mundo posible) indicando la extensión de las expresiones del lenguaje, es decir, los objetos del mundo designados por las expresiones del lenguaje (véase la definición del término 'extensión' en la p. 7).

Junto con el de 'interpretación', también se usa a menudo el término **modelo.** aunque este concepto se suele introducir de manera ligeramente diferente. Si un enunciado es verdadero en una determinada interpretación, decimos que la interpretación **es un modelo del enunciado.** La teoría general que estudia el tipo de semántica que presentamos en esta sección se llama a menudo **Teoría de Modelos.** (El uso que aquí damos a la palabra 'modelos' difiere del uso habitual en la mayoría de los contextos científicos y cotidianos).

Empezamos con las constantes de individuo. A cada constante de individuo corresponde un cierto individuo en el mundo. Podemos poner como ejemplo un lenguaje con las constantes individuales *a-h* y un mundo posible con el correspondiente número de individuos. Relacionamos las constantes de individuo con el mundo de la siguiente manera.

(1)

a = Alfredo	e = Esteban
b = Benito	f = Francisco
c = Carlos	g = Gabriel
d = Dionisio	h = Hugo

El mundo que consideramos contiene estos ocho individuos y ningún otro. En este caso tenemos un nombre para cada individuo del mundo. Se trata de un ejemplo simplificado, construido únicamente con el fin de ilustrar la exposición. Como es obvio, sería notablemente más problemático dar nombres a cada individuo en el mundo real.

Estudiemos ahora las constantes de predicado. La extensión de un predicado unario es el conjunto de individuos de los que se puede afirmar el predicado. La extensión de un predicado binario es el conjunto de pares ordenados de individuos de los cuales se puede afirmar el predicado.

Podemos resumir la situación como sigue:

(2)

(a) Un predicado unario se interpreta como un conjunto de individuos.

(b) Un predicado binario se interpreta como un conjunto de pares ordenados de individuos.

(c) Un predicado ternario se interpreta como un conjunto de triplos ordenados de individuos.

⋮

(d) Un predicado n-ario se interpreta como un conjunto de n-tuplos ordenados de inviduos.

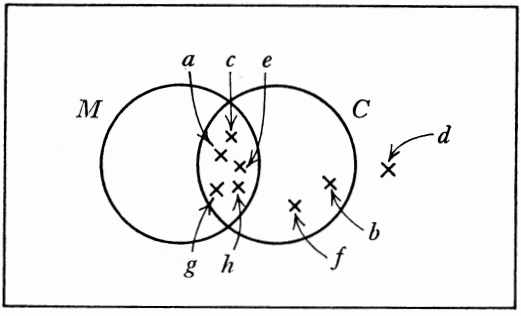
Vamos a introducir ahora dos predicados binarios, *M* para 'alce' y *C* para 'listo'. Las listas siguientes dan las extensiones de estos predicados.

(3)

M: {Alfredo, Carlos, Dionisio, Esteban, Hugo}
C: {Alfredo, Carlos, Esteban, Gabriel, Hugo, Francisco}

La interpretación que hemos dado puede interpretarse en un diagrama como (4):

(4)



Vamos a ver ahora qué valor de verdad tienen unos cuantos enunciados en la interpretación dada.

(5)	(a) $M(b)$	'Benito es un alce'	falso
	(b) $C(a)$	'Alfredo es listo'	verdadero
	(c) $C(g)$	'Gabriel es listo'	verdadero
	(d) $M(e)$	'Esteban es un alce'	verdadero
	(e) $C(d)$	'Dionisio es listo'	falso

La condición de verdad para enunciados del mismo tipo que los de (5) es sencilla y puede formularse como en (6).

(6) Un enunciado de la forma $P(t)$ es verdadero en una interpretación dada sólo si el objeto asignado al término de individuo está entre los objetos asignados al predicado en la interpretación.

Esto significa que $F(a)$ es verdadero en una determinada interpretación si el objeto asignado a a por la interpretación pertenece a la extensión de F.

La condición de verdad de un enunciado con un predicado binario se puede formular como en (7).

(7) Un enunciado de la forma $P(t_1, t_2)$ es verdadero en una interpretación dada si y sólo si el par ordenado de objetos asignados a t_1, t_2 pertenece al conjunto de pares ordenados asignados a P por la interpretación en cuestión.

Esto significa que un enunciado $F(a, b)$ es verdadero en una interpretación si el par ordenado de objetos asignados a a, b en la interpretación está incluido en la extensión de F.

Volvamos ahora a la interpretación que hemos descrito en (4) y vea-

mos cuáles entre los siguientes enunciados es verdadero en esta interpretación.

(8)	(a) $M(g) \& C(b)$	'Gabriel es un alce y Benito es listo'	verdadero
	(b) $M(b) \vee C(d)$	'Benito es un alce o Dionisio es listo'	falso
	(c) $\sim M(e)$	'Esteban no es un alce'	falso
	(d) $M(b) \rightarrow C(g)$	'Si Benito es un alce entonces Gabriel es listo'	verdadero

Para determinar el valor de verdad de estos enunciados compuestos, partimos de los enunciados simples que los forman. En (8) (a) encontramos que los dos enunciados que forman la conjunción son verdaderos y por lo tanto también ha de serlo la conjunción en conjunto. En (8) (b), por el contrario, los dos elementos de la disyunción son falsos y, por lo tanto, también es falsa la disyunción. Las reglas que seguimos son idénticas a las de la lógica proposicional. La única diferencia es que en lógica de predicados partimos de un nivel que está por debajo del nivel de partida de la lógica de enunciados. En lógica proposicional la verdad o falsedad de un enunciado como $M(g)$ se supone dada, pero en la lógica de predicados derivamos la verdad o falsedad de este enunciado a partir de su estructura interna.

Para determinar el valor de verdad de (8) (c) partimos del interior del enunciado y continuamos hasta obtener el valor de verdad del enunciado completo. Comenzados con el enunciado $M(e)$ y vemos que este enunciado ha de ser verdadero puesto que e designa, en la interpretación dada en (4), un objeto que está incluido en la extensión de M. Después tomamos en consideración el signo de negación y encontramos, siguiendo las reglas dadas en el capítulo de lógica de enunciados, que $\sim M(e)$ ha de ser falso, puesto que $M(e)$ es verdadero.

Finalmente, (8) (d) ha de ser verdadero, puesto que el primer enunciado es falso mientras que el segundo es verdadero; esto hace que la implicación sea verdadera. En (9) damos una tabla de verdad (parcial) de (8) (d).

(9)

$$M(b) \rightarrow C(g)$$
$$\mathbf{f} \quad \mathbf{t} \quad \mathbf{t}$$

En el análisis de los enunciados en (8) se pone de manifiesto cómo aparecen las reglas de la lógica de enunciados en la lógica de predicados. Estudiemos ahora algunos enunciados compuestos, con cuantores, y veamos cómo se determina su valor de verdad según la interpretación dada en (4)

(10)	(a) $\exists x\, M(x)$	'Hay un alce' o 'Algo es un alce'	verdadero
	(b) $\sim \exists x\, C(x)$	'No es el caso que haya algo que sea listo'	falso
	(c) $\sim \exists x\, M(x)$	'No es el caso que algo sea un alce' o 'Nadie es un alce'	falso
	(d) $\exists x \sim C(x)$	'Alguien no es listo'	verdadero
	(e) $\exists x\, (M(x)\ \&\ C(x))$	'Algún alce es listo'	verdadero

El principio que aquí se aplica es el siguiente: $\exists x\, F(x)$ es verdadero en una interpretación I sí y sólo si F tiene al menos un objeto en su extensión en I. Si sabemos esto, es fácil también saber cuál es el valor de verdad de los enunciados con una negación combinada con el cuantor existencial.

(11)	(*a*) $\sim \exists x\, F(x)$	es verdadero en I	sii la extensión de F en I es el conjunto vacío.
	(b) $\exists x \sim F(x)$	es verdadero en I	sii hay al menos un objeto en I que no está incluido en la extensión de F en I.
	(c) $\sim \exists x \sim F(\mathrm{R})$	es verdadero en I	sii no hay ningún objeto en I que no está incluido en la extensión de F en I, lo cual equivale a decir que todos los objetos están incluidos en la extensión de F.

Estas definiciones del valor de verdad para combinaciones del cuantor existencial con la negación son redundantes si se han dado antes las condiciones de verdad para el cuantor existencial y la negación. Aquí sólo se dan con fines de aclaración. Tanto en la lógica de predicados como en la lógica de enunciados, el valor de verdad de un enunciado compuesto es función de las condiciones de verdad de los componentes del enunciado.

Vamos a determinar ahora, teniendo presente la interpretación dada en (4), el valor de verdad de los siguientes enunciados.

(12)	(a) $\forall x\, C(x)$	'Todos son listos'	falso
	(b) $\sim \forall x\, M(x)$	'No todos son alces'	verdadero
	(c) $\forall x \sim M(x)$	'Todos no son alces'; entiéndase como 'Para cada uno vale decir que él no es un alce'	falso
	(d) $\forall x\, (M(x) \rightarrow C(x))$	'Todo alce es listo'	verdadero
	(e) $\forall x\, (C(x) \rightarrow M(x))$	'Todo el que es listo, es un alce'	falso

El principio fundamental empleado aquí es (13).

(13) $\forall x\, F(x)$ es verdadero en I sii todos los objetos caen dentro de la extensión de F en I.

Analizamos pormenorizadamente los detalles en (14).

(14) (a) $\sim \forall x\, F(x)$ es verdadero en I, sii no todos los objetos en I están incluidos en la extensión de F en I, es decir, algunos objetos en I no pertenecen a la extensión de F.

(b) $\forall x \sim F(x)$ es verdadero en I, sii todos los objetos en I están fuera de la extensión de F en I, es decir, no hay ningún objeto en la extensión de F.

Veamos un ejemplo de entre los enunciados en (12). Consideremos primero el nunciado $\forall x\, M(x)$ 'Todos son alces', que aparece como parte en en el enunciado $\sim \forall x\, M(x)$. Vemos que el primer enunciado es falso en la interpretación dada en (4). Francisco no es un alce en esta interpretación, por ejemplo. Dado que el enunciado es falso, su negación (es decir, el enunciado (12) (b)) es verdadera.

Conocemos por la lógica proposicional las condiciones de verdad de la implicación (véase p. 38). De acuerdo con esa definición, podemos dar la siguiente condición de verdad para enunciados como (12) (d, e).

(15) $\forall x\, (F(x) \rightarrow G(x))$ es verdadero en I, sii todos los objetos que pertenecen a la extensión de F en I pertenecen también a la extensión de G en I; es decir, no hay ningún objeto F que no sea también G.

5.5. VERDADERO EN TODA INTERPRETACION

Volvamos al razonamiento con que abrimos el capítulo de lógica de predicados. Repetimos el razonamiento en forma ligeramente modificada.

(1) Premisas: Todo alce es listo
Bruce es un alce

Conclusión: Bruce es listo

La validez o corrección de un razonamiento como (1) ha de darse en toda interpretación y no sólo en una determinada; o, para usar una terminología diferente: en todo mundo posible en que las premisas sean verdaderas ha de serlo también la conclusión.

Si una inferencia es correcta, no es posible construir un mundo posible en que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

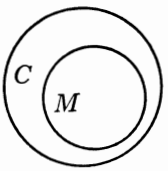
¿Cómo se comprueba si un razonamiento es correcto? Dado que hay un número infinito de mundos posibles, no es posible ver si en cada uno de ellos la conclusión se sigue de las premisas. Lo más que cabe esperar de la consideración de un mundo tras otro es el saber si el razonamiento no es correcto. La razón es que tan pronto como se encuentra una interpretación en la que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa, sabemos que el razonamiento en cuestión es incorrecto.

Sin embargo, podemos mostrar que un razonamiento es correcto. Los razonamientos correctos en virtud de su estructura lógica, independientemente de la configuración de los mundos posibles.

El razonamiento que aparece en (1) es intuitivamente correcto y, por serlo, hemos de ser capaces de mostrar su corrección investigando su estructura, como hemos dicho antes. Si se encuentra una interpretación en la que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa, sabemos que el razonamiento es incorrecto. Si podemos demostrar que no existe ninguna interpretación así, sabemos que el razonamiento es correcto.

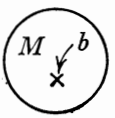
Intentemos construir una interpretación en donde las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Empecemos con la primera premisa. ¿Qué se necesita para que esta premisa sea verdadera? Es claro que lo primero que se precisa es que todos los elementos de la extensión del predicado 'alce' sean elementos de la extensión del predicado 'listo'. Esta situación se describe en el diagrama (2), donde *C* está por 'listo' y *M* por 'alce'.

(2)



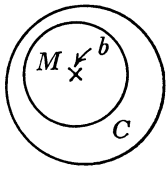
La segunda premisa es verdadera sí y sólo si Bruce es un elemento de la extensión del predicado 'alce'.

(3)



Si consideramos a la vez ambas premisas, tenemos la situación que se describe en (4). Simplemente unimos (2) y (3) en una sola figura.

(4)

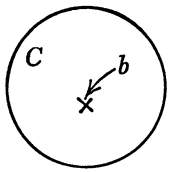


(4) describe la situación en el caso de que ambas premisas sean verdaderas. En todo mundo posible en que ambas premisas sean verdaderas, ocurrirá que la extensión de 'alce' es un subconjunto de la extensión de 'listo' y que Bruce es un elemento de la extensión de 'alce'.

Si el razonamiento en (1) es correcto, es imposible que la conclusión sea falsa siendo verdaderas las premisas, o lo que es lo mismo, cuando se da la situación descrita en (4). La corrección del razonamiento se sigue de la imposibilidad de construir un mundo posible en el que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

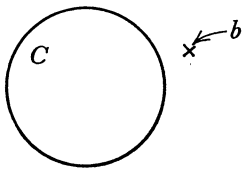
Si la conclusión en (1) es verdadera, Bruce es un elemento de la extensión de 'listo'.

(5)



Por otro lado, si la conclusión es falsa, Bruce no es un elemento de la extensión de este predicado.

(6)



De los dos diagramas (5) y (6), sólo (5) es compatible con (4), el diagrama que describía la situación en que las dos premisas son verdaderas.

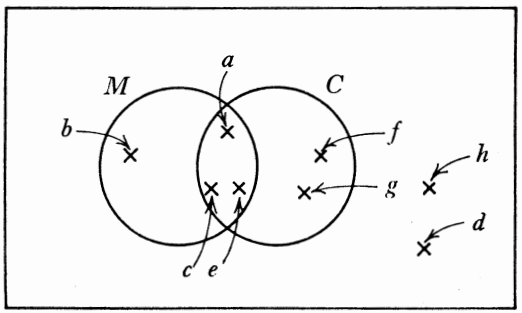
(6) contradice a (4) porque afirma que Bruce no pertenece a la ex-

tensión de 'listo'. Sin embargo, dado que según (4) Bruce es un elemento de la extensión de 'alce' y que la extensión de 'alce' es un subconjunto de la extensión de 'listo', Bruce ha de ser un elemento de la extensión de 'listo'. En todo mundo posible en que (4) sea verdadero, (5) es también verdadero.

Por lo tanto, no parece que sea posible construir un mundo posible en que la conclusión sea falsa siendo verdaderas las premisas, lo que significa que el razonamiento (1) es correcto.
Podríamos abreviar notablemente esta demostración utilizando el formalismo de la teoría de conjuntos pero hemos preferido, en vez de ello, un razonamiento informal basado en las intuiciones subyacentes a la teoría de conjuntos.

Decir que el razonamiento expresado en (1) es correcto no implica que el enunciado *Bruce es listo* sea verdadero en todo mundo posible: sólo significa que el enunciado es verdadero en todo mundo posible en que las dos premisas de (1) son verdaderas. Consideremos la interpretación dada en (7).

(7)



Es obvio que en esta interpretación es falso que Bruce sea listo. ¿Significa esto que (7) implique la incorrección del razonamiento (1)? No; en modo alguno. La razón es que en el mundo descrito en (7) no ocurre que las dos premisas sean verdaderas. En la situación descrita, la premisa *Todo alce es listo* es falsa. Según se ve en (7), Bruce resulta ser un alce que no es listo y por lo tanto, hay al menos un alce que no es listo.

Estudiemos ahora otro razonamiento que difiere de (1) en que se han intercambiado la conclusión y la segunda premisa.

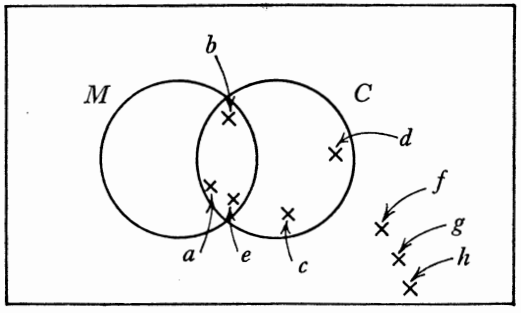
(8) Premisas: Todo alce es listo
Bruce es listo

Conclusión: Bruce es un alce

Antes de continuar leyendo, el lector debe analizar sus propias intuiciones respecto a la corrección del razonamiento. Puede ocurrir que la res-

puesta correcta no surja inmediatamente. Bien, ¿(8) es un razonamiento correcto, o no? Considérese la interpretación descrita en (9)

(9)

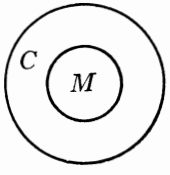


Tanto las premisas como la conclusión son verdaderas en esta interpretación. La primera premisa es verdadera porque la extensión de 'alce' es un subconjunto de la extensión de 'listo'. La segunda premisa es verdadera porque Bruce es un elemento de la extensión de 'listo', y la conclusión es verdadera porque Bruce está también en la extensión de 'alce'.

¿Demuestra esto que (8) sea un razonamiento correcto? No; sólo se ha demostrado que la conclusión puede ser verdadera cuando las premisas son ambas verdaderas, pero no que la conclusión tenga que ser verdadera cuando las premisas lo son. Intentemos construir una interpretación en la que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa.

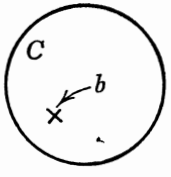
Para que la primera premisa sea verdadera, la extensión de 'alce' ha de ser un subconjunto de la extensión de 'listo'.

(10)



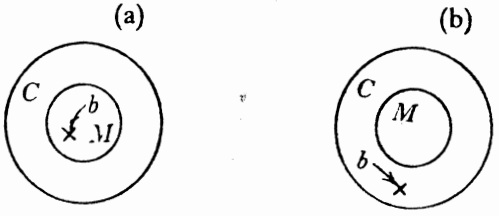
La segunda premisa es verdadera sólo si Bruce es un elemento de la extensión de 'listo'.

(11)



Hay dos medios de combinar (10) con (11). Aparecen en (12) (a) y (12) (b).

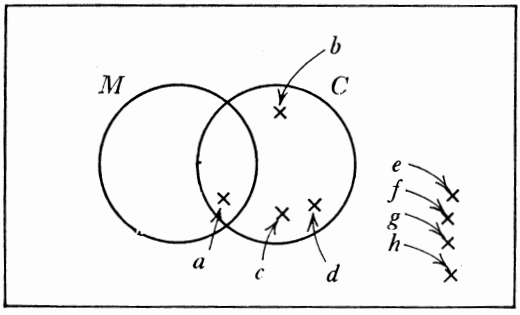
(12)



En todos los mundos en que exista la situación descrita en (12) (a) o (12) (b), ocurrirá que las dos premisas son verdaderas; la conclusión de (8), sin embargo, es compatible con (12) (a), pero no con (12) (b). La conclusión es verdadera sólo cuando Bruce es un elemento de la extensión de 'alce'.

Uno de los mundos posibles en que existe la situación descrita en (12) (b) es el que describe la interpretación en (13).

(13)



(13) pone de manifiesto que hay al menos un mundo posible en que la conclusión es falsa siendo verdaderas las premisas. Esto significa que (8) no es un razonamiento correcto.

Al tratar más arriba de los cuantores, se habrá notado que un enunciado con un cuantor universal puede parafrasearse por medio de un enunciado con un cuantor existencial y viceversa. Se puede decir, de modo general, que un enunciado con uno de los cuantores es siempre equivalente a un enunciado con el otro cuantor. Los enunciados en (14) son verdaderos en todas las interpretaciones, lo que quiere decir que son verdades lógicas.

(14)

(a) $\exists x\, F(x) \equiv \sim \forall x \sim F(x)$

(b) $\sim \exists x\, F(x) \equiv \forall x \sim F(x)$

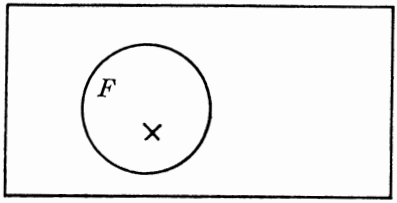
(c) $\exists x \sim F(x) \equiv \sim \forall x\, F(x)$

(d) $\sim \exists x \sim F(x) \equiv \forall x\, F(x)$

A modo de ejemplo, vamos a mostrar la validez de (14) (a) por medio de un razonamiento informal. El primer enunciado de (14) (a) afirma que

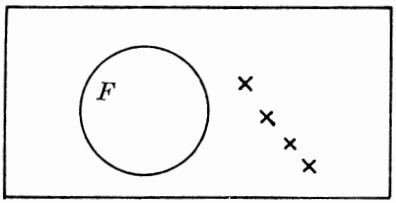
hay al menos un elemento en la extensión del predicado *F*, en el modo que (15) indica.

(15)



El segundo enunciado en (14) (a), $\sim \forall x \sim F(x)$, es la negación del enunciado $\forall x \sim F(x)$. Este último enunciado afirma que todos los objetos en el universo del discurso están fuera de la extensión de *F*, según se indica en (16). Es obvio que la negación de este enunciado, es decir, el segundo enunciado de (14) (a), es equivalente al enunciado $\exists x\, F(x)$.

(16)



5.6. RESUMEN DE LA SEMANTICA DE LA LOGICA DE PREDICADOS

Vamos a utilizar en este resumen de la semántica la misma terminología que utilizamos al resumir la sintaxis.

(2)

(a) $P(t)$ es verdadero en *I*, sii *t* se refiere a un individuo en *I* que sea elemento de la extensión de *P* en *I*.

(b) $P(t_1, t_2)$ es verdadero en *I*, sii $\langle t_1, t_2 \rangle$ se refiere en I a un par que es un elemento de la extensión de *P* en *I*.

(c) $P(t_1 \ldots t_n)$ es verdadero en *I*, sii $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ se refiere en *I* a un *n*-tuplo que es un elemento de la extensión de *P* en *I*.

(d) $\forall x\, P(x)$ es verdadero en *I*, sii todos los individuos en *I* son elementos de la extensión de *P* en *I*.

(e) $\exists x\, P(x)$ es verdadero en *I*, sii hay al menos un individuo en *I* que es un elemento de la extensión de *P* en *I*.

(f) $\sim \alpha$ es verdadero en *I*, sii α no es verdadero en *I*

(g) $\alpha \& \beta$ es verdadero en *I*, sii tanto α como β son verdaderos en *I*.

(h) $\alpha \vee \beta$ es verdadero en *I*, sii al menos uno de los enunciados α o β es verdadero en *I*.

(i) $\alpha \rightarrow \beta$ es verdadero en *I*, sii α no es verdadero en *I* o β es verdadero en *I*.

(j) $\alpha \equiv \beta$ es verdadero en *I*, sii los dos enunciados son verdaderos en *I* o los dos son falsos en *I*.

Estas condiciones de verdad pueden parecer complicadas a primera vista, pero una vez que se han leído las secciones 5.4 y 5.6, deberían resultar bastante evidentes.

5.7. UNA VERSION FORMAL DE LA SEMANTICA

Al analizar la semántica de la lógica de predicados en la sección 5.4 y en el resumen de la sección 5.6, no hemos tenido en cuenta los enunciados cuantificados con predicados binarios o *n*-arios. Si no lo hicimos es porque el tratamiento de su semántica precisa de un aparato técnico que podría resultar extraño a un estudiante sin base matemática o filosófica.

Vamos a introducir una parte de este aparato formal para ver cómo se interpretan expresiones cuantificadas de mayor grado de complejidad. En primer lugar introducimos el conjunto *D*, definido como el conjunto de individuos que aparecen en las interpretaciones, es decir, el conjunto de individuos en los mundos posibles.

Podemos construir el conjunto *S*, definido como el conjunto de las secuencias de individuos en *D*. Una secuencia puede entenderse como una enumeración de individuos en *D* (cfr. p. 13). El mismo individuo puede aparecer más de una vez en la secuencia. Nuestro amigo Bruce puede aparecer, por ejemplo, en los lugares noveno, vigesimoséptimo y nonagésimoctavo de una y la misma secuencia. Los *n*-tuplos ordenados de (1) son, todos ellos, secuencias admisibles.

(1) (a) ⟨Bruce, Hugo, Diana⟩
(b) ⟨Bruce, Bruce, Hugo, Diana, Bruce, Hugo⟩
(b) ⟨Bruce, Bruce⟩
(d) ⟨Bruce, Hugo, Diana, Diana, Diana...⟩
(e) ⟨Hugo, Hugo, Diana, Diana⟩

Introducimos finalmente f, la llamada **función de asignación.** De modo informal podemos decir que f nos determina las interpretaciones. Para empezar f asigna un conjunto de individuos a cada interpretación. A la interpretación I_n, f le asigna el conjunto D_n, que, intuitivamente, es el conjunto de individuos acerca del que podemos hablar en ese mundo. Este conjunto es necesariamente un subconjunto de D, $D_n \subseteq D$. Algunas lógicas se construyen de tal modo que $D_n = D$, para toda interpretación. En este caso tendríamos los mismos individuos en todo mundo posible. Otras lógicas no tienen esta restricción. Intuitivamente no parece que haya razón para introducir una restricción así. Los mundos posibles pueden diferir entre sí de muchas maneras y no parece que exista ninguna razón particular para que no difieran también en el conjunto de individuos que contienen. Estos problemas referentes a los habitantes de los mundos posibles han sido ampliamente discutidas en la bibliografía lógica.

En segundo lugar, f asigna un individuo a cada constante de individuo en cada interpretación. Como se recordará, en la anterior versión de la semántica, más informal, se hacía ya una asignación de este tipo.

En tercer lugar, f asigna una extensión a cada constante de predicado en cada interpretación:

> a cada predicado unario en I_n, f le asigna un conjunto de individuos de entre los de D_n;
> a cada predicado binario en I_n, f le asigna un conjunto de pares ordenados de individuos de entre los de D_n;
> etc.

En cuarto lugar, f asigna un conjunto infinito de secuencias a cada interpretación. A I_n, f le asigna S_n, que es necesariamente un subconjunto de S. El conjunto S_n es el conjunto de secuencias que pueden construirse a partir de los elementos de D_n. Incluso si D_n contiene un número finito de individuos, el conjunto S_n es infinito debido a que el mismo individuo puede aparecer en diferentes lugares en una secuencia. En lo que sigue hablaremos de s como una secuencia cualquiera en S_n.

En principio, en lógica de predicados, se permite un número ilimitado de variables. Introducimos la convención de que las variables de individuo son x_1, x_2, x_3 ... en vez de x, y, z.... Se trata de una convención respecto a la notación que no tiene importancia alguna para la lógica misma.

Como ya hemos dicho, s se usa para referirse a una secuencia cualquiera en una interpretación. Introducimos la siguiente terminología: Una expresión como s_5 se usa para referirse al individuo que ocupa el quinto lugar en la secuencia s y s_i se usa para referirse al individuo que ocupa el lugar i en la secuencia. En ocasiones resultará más claro escribir $s(5)$ en vez de s_5 y $s(i)$ en vez de s_i.

Por medio de esta terminología y de las secuencias vamos a definir el concepto de verdad en términos de la noción de **satisfacción,** que definiremos recursivamente. En la sección 5.2 dijimos que un enunciado abierto como $F(x)$ es satisfecho por el individuo Bruce sí y sólo si Bruce fluye. (Es importante tener en cuenta que un enunciado abierto sólo es satisfecho por un individuo y no por un nombre). Aquí vamos a utilizar la misma noción de satisfacción, pero la referiremos a la noción de verdad para los enunciados, es decir, para las expresiones sin variables libres por medio del siguiente postulado: UNA EXPRESION ES VERDADERA SI ES SATISFECHA POR TODA SECUENCIA Y ES FALSA SII NO LA SATISFACE NINGUNA SECUENCIA. Esto implica que si un enunciado es satisfecho por una secuencia, lo es por todas.

En (2) damos la definición recursiva de satisfacción en una interpretación. Decimos que una secuencia satisface una expresión si el (los) miembro(s) apropiado(s) de la secuencia la satisface(n).

(2) (a) s satisface $C(x_i)$ en I_n — sii s_i corre (donde s_i es el individuo en el i lugar de s y C = 'corre')

(b) s satisface $A(x_i, x_j)$ en I_n — sii s_i admira a s_j

(c) s satisface $G(x_i, x_j, x_k)$ en I_n — sii s_i da s_j a s_k

— de modo similar para los demás predicados unarios, binarios y, en general, *n-a*rios.

(d) s satisface $\sim \alpha$ en I_n — sii no es el caso que s satisfaga α en I_n

(e) s satsface $\alpha \vee \beta$ en I_n — sii s satisface α o s satisface β en I_n

— y de modo similar para el resto de las conectivas.

(f) s satisface $\exists x_i \alpha$ en I_n — sii hay al menos un individuo a en D_n tal que s^i_a satisface α, donde s^i_a es la secuencia que se obtiene de s al remplazar el individuo $s(i)$ por el individuo a

(Nótese que s^i_a denota una secuencia y no un individuo, al contrario que la expresión s_i).

(g) s satisface $\forall x_i \alpha$ en I_n — sii para todo individuo a en D_n, s^i_a satisface α, donde s^i_a es la secuencia que se obtiene al remplazar $s(i)$ por a.

En este caso todo individuo de D_n puede ponerse en lugar de $s(i)$.

La verdadera ventaja de esta versión de la semántica frente a la versión anterior (sección 5.6) es lo que se dice (2) (f) y en (2) (g), que nos capacita para tratar enunciados con más de un cuantor.

Veamos cómo se puede manejar con este método un enunciado con más de un cuantor. Estudiemos el enunciado (3), donde A está por 'admira'

(3) $$\forall x_3 \exists x_7 A(x_3, x_7)$$

Los pasos de (4) indican qué se requiere para que una secuencia satisfaga el enunciado (3).

(4) (a) s satisface $\forall x_3 \exists x_7 A(x_3, x_7)$ en I_n
sii para todo individuo a en D_n s^3_a satisface $\exists x_7 A(x_3, x_7)$

(b) s^3_a satisface $\exists x_3 A(x_3, x_7)$ en I_n
sii hay al menos un individuo b en D_n tal que $(s^3_a)^7_b$ satisface $A(x_3, x_7)$

($(s^3_a)^7_b$ es igual a la secuencia original s, excepto en la tercera y séptima posición, en donde aparecen a y b. $(s^3_a)^7_b$ se obtiene a partir de s^3_a remplazando el individuo que ocupa la séptima posición por b.)

(c) $(s^3_a)^7_b$ satisface $A(x_3, x_7)$ en I_n
sii $(s^3_a)^7_b$ (3) admira $(s^3_a)^7_b$ (7), es decir sii a admira b

(d) Si estudiamos otra vez (4) (b) vemos que s^3_a satisface $\exists x_7 A(x_3, x_7)$ en I_n
sii algún individuo es admirado por a en I_n

(e) Si estudiamos de nuevo (4) (a), vemos que s satisface $\forall x_3 \exists x_7 A(x_3, x_7)$ en I_n
sii todos los individuos admiran a algún individuo en I_n

(f) Dado que s era una secuencia cualquiera, vemos que $\forall x_3 \exists x_7 A(x_3, x_7)$ es verdadero en I_n
sii todos los individuos admiran a algún individuo en I_n.

(5) $$\exists x_2 \forall x_1 (A(x_1, x_2) \rightarrow D(x_2, x_1))$$

Vamos a analizar ahora esta expresión, un poco más complicada, para ver qué se requiere para que sea verdadera en una interpretación cualquiera I_n. Distinguimos los siguientes pasos.

(6) (a) s satisface $\exists x_2 \forall x_1$ (...) en I_n

sii hay al menos un individuo a en D_n tal que s_a^2 satisface $\forall x_1$ (...))

(b) s_a^2 satisface $\forall x_1$ (...)) en I_n

sii para todos los individuos b en D_n, $(s_a^2)_b^1$ (1) satisface (...) en I_n

(c) $(s_a^2)_b^1$ satisface $A(x_1, x_2) \rightarrow D(x_2, x_1)$ en I_n

sii $(s_a^2)_b^1$ (2) desdeña a $(s_a^2)_b^1$ (1) cuando $(s_a^2)_b^1$ (1) admira a $(s_a^2)_b^1$ (2), es decir, si a desdeña a b cuando b admira a a

(d) Considerando otra vez (6) (b), vemos que s_a^2 satisface $\forall x_1$ (...) en I_n

sii todos los individuos que admiran a a son desdeñados por él en I_n

(e) Considerando de nuevo (6) (a), vemos que s satisface $\exists x_2 \forall x_1$ en I_n

sii hay algún individuo que desdeña a todos los individuos que le admiran en I_n

(f) Dado que s era una secuencia cualquiera, vemos que $\exists x_2 \forall x_1$ (...) es verdadero en I_n

sii hay algún individuo que desdeña a todos los individuos que le admiran en I_n

El método de sustitución y el uso de secuencias son instrumentos necesarios para analizar enunciados cuantificados con más de un cuantor. Si volvemos la vista al resumen de la semántica de la lógica de predicados tal como se presentó en la sección 5.6, veremos que allí se dan las condiciones de verdad para enunciados del tipo $\forall x\, P(x)$ y $\exists x\, Px$. Sin embargo, estas condiciones de verdad no nos sirven de mucho cuando se trata de enunciados que contienen más de un cuantor. Con el instrumental de esta sección podemos manejar enunciados con más de un cuantor así como pares de enunciados que sólo difieren en el orden de sus cuantores. Desgraciadamente las técnicas aquí introducidas son bastante complejas, aunque debería ser posible captar las intuiciones que las suyacen. Al menos así lo pensamos.

5.8. PROPIEDADES FORMALES DE LAS RELACIONES

Si los predicados binarios y, en general, *n*-arios, se consideran desde un punto de vista semántico, se llaman relaciones y se clasifican en diferentes tipos según sus propiedades formales. Vamos a estudiar tres parámetros según los cuales se ordenan las relaciones diádicas (que corresponden a los predicados binarios) en diferentes grupos. Estos parámetros son reflexividad, simetría y transitividad.

5.8.1. *Reflexividad*

Si es verdad que todos los individuos están en la relación R consigo mismos, entonces se dice que R es una relación **reflexiva.** Si ningún individuo está en la relación R consigo mismo se dice que R es **irreflexiva.** Si la siguiente definición se cumple, la relación es reflexiva.

(1) (a) $\forall x\, R(x, x)$

Si (1) (b) se cumple, la relación es irreflexiva.

(1) (b) $\forall x \sim R(x, x)$

Una relación que no es reflexiva se llama **no-reflexiva.** 'Tan grande como' e 'idéntico a' son relaciones reflexivas. Valgan 'padre de' y 'más alto que' como ejemplos de relación irreflexiva: una persona no puede ser su propio padre o más alto que él mismo. 'Satisfecho con' es una relación no-reflexiva. Una persona puede estar o no estar satisfecha consigo misma.

5.8.2. *Simetría*

Si siempre que se da relación R entre dos objetos x e y, se da también esa relación entre y y x, decimos que la relación R es **simétrica,** es decir, R es simétrica si la relación se da siempre en la dirección opuesta. Si una relación no es simétrica, se llama **no-simétrica.**

(1) (a) $\forall x \forall y\, (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$

Si (1) (a) es válido, la relación es simétrica.

(b) $\forall x \forall y\, (R(x, y) \rightarrow \sim R(y, x))$

Si (1) (b) es válido, la relación es asimétrica.

Las relaciones 'tan gordo como' y 'ha encontrado a alguien' son simétricas, mientras que 'más gordo que' y 'padre de' son asimétricas. Una relación como 'hermano de' es no-simétrica.

Ante un enunciado como (2) tenderíamos a pensar que 'hermano de' es simétrica, pero al ver (3) nos damos cuenta de que este no es el caso. Cuando una relación se da a veces en la dirección opuesta y a veces no, es no-simétrica.

(2) Pepe es hermano de Luis

(3) Pepe es hermano de Luisa [2]

5.8.3. *Transitividad*

Si siempre que se da la relación R entre los objetos x e y y entre los objetos y y z, se da R entre los objetos x y z, se dice que la relación es **transitiva.**

Si esto no ocurre nunca, la relación es **intransitiva.** Una relación que no es transitiva se llama **no-transitiva.**

(1) (a) $\forall x \forall y \ \forall z \ ((R(x, y) \ \& \ R(y, z)) \rightarrow R(x, z)$

Si (1) (a) se cumple, la relación es transitiva.

(b) $\forall x \forall y \ \forall z \ ((R(x, y) \ \& \ R(y, z)) \rightarrow \sim R(x, z)$

Si esto último se cumple, la relación es intransitiva.[3]

'Más grande que' y 'a la izquierda de' son relaciones transitivas, mientras que 'padre de', por ejemplo, es una relación intransitiva. La mayoría

---

[2] 'Hermano de' no es simétrica puesto que, en el ejemplo, Luisa no es hermano sino hermana de Pepe. En otros idiomas es más claro este hecho. Piénsese en brother/sister; frère/soeur; Bruder/Schwester. (N. del T.).

[3] Al definir la reflexividad, simetría y transitividad hemos usado deliberadamente una terminología poco precisa. Hemos definido estos conceptos de la siguiente manera: Si esto (es decir, una expresión) se da, la relación se llama reflexiva/simétrica/transitiva.

Hay dos modos de precisar estas definiciones: si esto (la expresión correspondiente) se cumple en una interpretación, la relación se llama *extensionalmente reflexiva/simétrica/transitiva* (es decir, reflexiva, simétrica transitiva en esa interpretación). Si la expresión correspondiente se cumple en toda interpretación, la relación es *intensionalmente reflexiva/simétrica/transitiva* (es decir, reflexiva, simétrica transitiva en toda interpretación).

El segundo modo de definir los conceptos es el más interesante desde un punto de vista lingüístico. Significa que el significado del predicado es tal que las expresiones que definen la reflexividad, la simetría y la transitividad resultan verdaderas en toda interpretación. Al dar ejemplos de los diferentes tipos de relación en esta sección, hemos usado la segunda y más interesante formulación de las definiciones.

de los verbos como 'conocer', 'admirar' y 'despreciar' son ejemplos de relaciones no-transitivas.

(2) Si Canuto es tan listo como Olaf y Olaf es tan listo como Gunnar, entonces Canuto ha de ser tan listo como Gunnar.

Las relaciones del tipo 'tan X como' son reflexivas, simétricas y transitivas. Estas relaciones se llaman **relaciones de equivalencia.**

5.8.4. *Conversa*

Una relación R se llama relación conversa de otra relación S, si $R(x, y)$ es verdadero siempre que $S(y, x)$ lo es. La relación 'progenitor de 'es la conversa de la relación 'hijo de'. Un predicado en voz pasiva puede considerarse como relación conversa del predicado en activa. Así 'es visto por' es la conversa de 've". Siempre que es cierto que Wotan ve a Thor, es cierto también que Thor es visto por Wotan.

La conversa de una relación R se escribe $\breve{R}$. Si P está por la relación 'progenitor de' y C por la relación 'hijo de', podemos decir que $P = \breve{C}$, es decir, 'padre de' es igual a la conversa de 'hijo de'.

5.8.5. *Estructura del dominio y codominio de las relaciones*

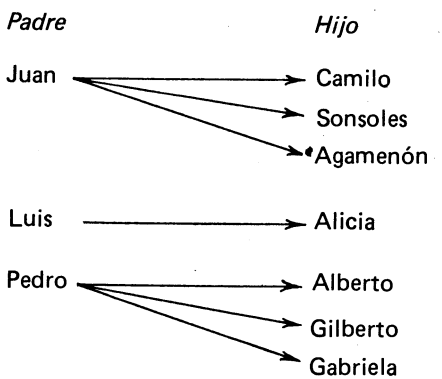
Las relaciones se pueden clasificar también según las relaciones que establezcan entre su dominio y su codominio. Considérense las relaciones 'padre de' y 'estar empleado a jornada completa en'. Existe una clara diferencia formal entre estas dos relaciones. Puede haber varias personas que estén empleadas a jornada completa en la misma industria, pero no es posible que diferentes personas sean el padre de un único niño. Por otro lado, un padre puede tener más de un hijo, pero una persona no puede estar empleada a la vez en más de una industria. Una relación como 'ser padre de' se llama **unívoca a la izquierda** (o relación de **uno a varios**) y una relación como 'estar empleado a jornada completa en' se llama relación **unívoca a la derecha** (o relación de **varios a uno**). Si la relación es del tipo unívoco a la izquierda, a cada elemento del dominio le corresponde uno o más elementos en el codominio, y para cada elemento en el codominio nunca hay más de un elemento correspondiente en el dominio. Si la relación es del tipo unívoco a la derecha, a cada elemento en el dominio le corresponde no más de un elemento en el codominio y a cada elemento en el codominio le puede corresponder más de un elemento en el dominio. Existen también las relaciones **biunívocas** (o relaciones **uno a uno**). Una relación biunívoca siempre tiene un elemento en el codominio que corresponde a un sólo elemento del dominio, y a cada elemento del codominio corresponde exactamente un elemento del

dominio. La relación entre las personas adultas y el número de su D.N.I es una relación biunívoca. Cada persona tiene un único número en su D.N.I. y cada número de un carné de identidad corresponde a una sola persona. El cuarto tipo de relación en esta clasificación es la relación **multívoca** (o relación de **varios a varios**). Una relación de este tipo es la relación 'ha leído', definida entre personas y libros. Una persona puede haber leído varios libros, y un libro suele haber sido leído por más de una persona.

Los siguientes diagramas aclararán estos conceptos. En cada una de las figuras el dominio de la relación se pone en la izquierda y el codominio en la derecha.

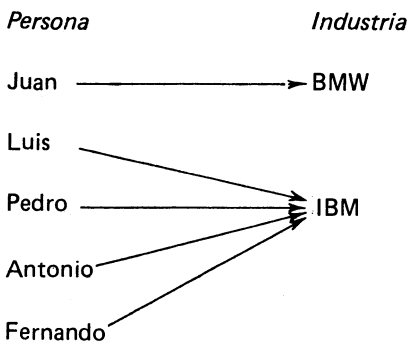
(1) Relación unívoca a la izquierda

Ej.: 'ser padre de'



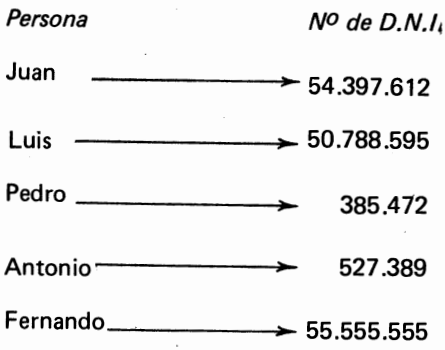
(2) Relación unívoca a la derecha

Ej.: 'estar empleado a jornada completa'



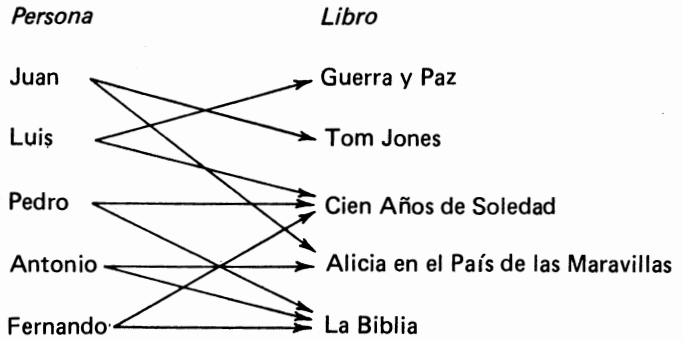
(3) Relación biunívoca

Ej.: 'tener el número de D.N.I.'



(4) Relación multívoca

Ej.: 'haber leído'



Las relaciones unívocas a la derecha y biunívocas se llaman funciones. La noción de función se introdujo ya en el capítulo de teoría de conjuntos. Para que una relación sea una función, ha de ocurrir que a cada elemento en el dominio le corresponda un y sólo un elemento en el codominio. Esta restricción define las funciones. Es fácil ver que el conjunto de las funciones es un subconjunto del conjunto de las relaciones.

EJERCICIOS

1. Sean a = Alicia, b = Bartolo, f = Francisco; A = admirar, D = desdeñar

   Traducir las siguientes expresiones de la lógica de predicados al castellano

   (*a*) $A(b, f)$
   (*b*) $A(b, f)$ & $D(f, b)$
   (*c*) $\exists x A(x, x)$
   (*d*) $\sim \forall x D(x, f)$
   (*e*) $\forall x(A(x, f) \rightarrow D(x, x))$
   (*f*) $\sim \exists x \forall y A(y, x)$
   (*g*) $\forall x \forall y(A(x, y) \rightarrow \sim D(x, y))$

2. Formalizar los siguientes enunciados en lógica de predicados

   (*a*) Canuto es Danés
   (*b*) Canuto era liberal pero Olaf era socialista
   (*c*) Luisa no le gusta a ningún chico
   (*d*) Todos los estudiantes leen algún libro
   (*e*) Ningún estudiante contesta todas las preguntas
   (*f*) Si todos los estudiantes catean, ninguno se sentirá feliz
   (*g*) Se puede, si se intenta

3. Clasifíquense las siguientes relaciones según la reflexividad, simetría y transitividad.

   (*a*) 'ganar tanto dinero como'
   (*b*) 'ganar tanto o más dinero que'
   (*c*) 'ser el abuelo de'
   (*d*) 'enamorarse de'
   (*e*) 'ser el hermano de'

4. ¿Es una función la relación entre una persona y sus huellas digitales?

5. Dar ejemplos de

   (*a*) una relación multívoca
   (*b*) una relación unívoca a la derecha
   (*c*) una relación unívoca a la izquierda
   (*d*) una relación biunívoca

6. Dar un ejemplo de un enunciado en lógica de predicados que sea falso en todo mundo posible.

7. Traducir los dos enunciados siguientes a la lógica de predicados.

   (*a*) Ricardo vio un oso y Juan también lo vio.
   (*b*) Ricardo vio un oso y Juan también vio uno.

8. Formalizar la ambigüedad del siguiente enunciado por medio de la lógica de predicados.

   Todo el mundo odia a alguien

9. Dar dos expresiones castellanas tal que una sea la conversa de la otra.

10. ¿Cómo se interpreta extensionalmente un predicado en lógica de predicados?

11. Formalizar en lógica de predicados el siguiente enunciado:

    Existe un poder maligno

12. ¿Qué es un enunciado abierto?

13. ¿Cuál de los siguientes enunciados es equivalente?

    (*a*) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$
    (*b*) $\forall x(F(x) \,\&\, G(x))$
    (*c*) $\sim \exists x(F(x) \,\&\, \sim G(x))$
    (*d*) $\exists x \sim (F(x) \,\&\, G(x))$
    (*e*) $\forall x \sim (F(x) \rightarrow G(x))$
    (*f*) $\sim \exists x \sim (F(x) \,\&\, G(x))$
    (*g*) $\sim \forall x(F(x) \,\&\, G(x))$

    Indicación: ver la pág. 82.

14. Dado el siguiente enunciado, donde *C* está por 'chica, *G* por 'gustar' y *a* se refiere a Arturo.

    $\sim \exists x(G(x) \,\&\, L(a, x))$

(a) Dar una interpretación que haga verdadero al enunciado.

(b) Dar una interpretación que haga falso el enunciado.

15. Dada la siguiente interpretación

a = Arturo $\quad$ c = Clara

b = Bartolo $\quad$ d = Doris

B 'chico': $\{a, b\}$

G 'chica': $\{c, d\}$

L 'amar':

¿Qué enunciados de entre los siguientes son verdaderos y cuáles falsos?

(a) $G(a)$

(b) $\forall x L(a, x)$

(c) $\sim L(a, d) \vee \sim B(d)$

(d) $\sim \exists x G(x)$

(e) $\forall x L(x, x)$

(f) $\exists x \forall y((B(x) \,\&\, G(y)) \rightarrow L(x, y))$

(g) $\forall x \forall y((B(x) \,\&\, G(y)) \rightarrow L(y, x))$

(h) $\forall x \forall y \forall z((L(x, y) \,\&\, L(y, z)) \rightarrow L(x, z)$

16. Dada la siguiente interpretación

a = Alberto

b = Bartolo

c = Cecilio

H 'caballo': $\{b, c\}$

L 'gustar': $\{\langle a, b\rangle \langle c, b\rangle \langle b, b\rangle \langle b, a\rangle\}$

(a) Dar un enunciado falso en esta interpretación.

(b) Dar un enunciado con una negación que sea verdadero en la interpretación.

(c) Dar un enunciado cuantificado universalmente que sea verdadero en la interpretación.

(d) Dar un enunciado cuantificado existencialmente que sea falso en la interpretación.

(e) Dar un enunciado con un cuantor existencial y uno universal que sea verdadero en la interpretación.

17. Dar una interpretación que haga verdaderos todos los enunciados del ejercicio (1).

6

Deducción [1]

6.1. EL SISTEMA DEDUCTIVO

Hemos visto en los capítulos sobre lógica proposicional y de predicados que ciertos enunciados se siguen de otros enunciados (o, más bien, proposiciones). Cuando un enunciado se sigue de otro decimos que el segundo implica al primero, e indicamos esta relación con el signo de la implicación. En este capítulo nos vamos a ocupar de enunciados que se siguen de otros enunciados independientemente de cómo sea el mundo: nuestro tema son los enunciados que se siguen LOGICAMENTE de otros enunciados. Que el enunciado p implique lógicamente al enunciado q significa que en todo mundo posible en que p es verdadero, q es verdadero también. Esta idea puede convertirse en una definición de consecuencia lógica, la relación lógica fundamental:

(1) q es consecuencia lógica de p sii no hay ninguna interpretación en que p sea verdadero y q falso [2].

Vamos a dar dos ejemplos elementales. El primero, (2) (a), está tomado de la lógica de enunciados y el segundo, (2) (b), de la lógica de predicados.

(2) (a) $(p \,\&\, q) \rightarrow (p \vee q)$
(b) $M(b) \rightarrow \exists x\, M(x)$

El primer ejemplo dice que si los enunciados p y q son verdaderos, entonces al menos uno de los dos es verdadero. Esto es, evidentemente verdadero, y puede probarse por medio de una tabla de verdad.

El segundo ejemplo dice que si un cierto individuo, al que nos refe-

---

[1] En Anderson y Johnstone (1962) se encuentra un buen tratamiento de los problemas tratados en este capítulo.

[2] A veces se usa la notación $p \vdash q$ se usa para 'q es una consecuencia lógica de p'.

rimos con la letra *b*, tiene la propiedad *M*, entonces alguien o algo tiene esa propiedad. Esto es también evidentemente verdadero, y la verdad de esa afirmación se pone de manifiesto considerando la imposibilidad de construir un mundo que la falsifique.

Nótese que en lógica de enunciados hay un método formal para decidir si cierto enunciado es lógicamente verdadero o no lo es, a saber, el método de las tablas de verdad. En lógica de predicados no hay un método formal correspondiente. En vez de ello hemos de esforzarnos en buscar interpretaciones que hagan verdadero o falso al enunciado.

Un sistema deductivo nos da un conjunto de reglas por medio de las cuales se puede decidir si un enunciado se sigue de otro. En concreto, podemos mostrar que los enunciados (2) (a) y (2) (b) son verdades lógicas con ayuda de las reglas del sistema deductivo. Podríamos decir, utilizando un paralelismo lingüístico, que las reglas del sistema deductivo definen una 'gramática' para las inferencias correctas.

La mayor parte de las reglas de un sistema deductivo tienen la forma siguiente: dado un enunciado del tipo A, se puede inferir un enunciado del tipo B. Naturalmente estas reglas han de preservar la verdad de aquello sobre lo que operan: si el primer enunciado es verdadero, el segundo ha de serlo también. Se puede decir que las reglas de un sistema deductivo indican operaciones que preservan el significado, entendiéndolo en el sentido restringido de 'preservar' la verdad.

Qué reglas se utilicen en un sistema deductivo depende de la semántica, puesto que es ella la que define las condiciones de verdad para los diferentes tipos de enunciados. En nuestro caso no se plantean mayores problemas, puesto que sólo vamos a tratar aspectos incuestionados de un sistema deductivo.

Más abajo damos una lista de reglas de un sistema deductivo. Las reglas deben entenderse del modo siguiente: Dado un enunciado de la misma forma que el de la izquierda de la barra, se puede inferir un enunciado como el del lado de la derecha.

(3) Introducción de la Conjunción

$$\begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \Big/\, p \,\&\, q$$

Esta regla dice que si sabemos que p es verdadero y que q es verdadero, podemos inferir la conjunción de ambos, $p \,\&\, q$. Esto es evidente pero, en cualquier caso, útil.

(4) Eliminación de la Conjunción

$$p \,\&\, q \;/\; p \quad \text{o} \quad p \,\&\, q \;/\; q$$

La regla afirma que si la conjunción de dos enunciados es verdadera, también lo son cada uno de los enunciados.

(5) **Introducción de la Disyunción**

$p / p \vee q$ o $q / p \vee q$

La regla dice que si hemos establecido la verdad de un cierto enunciado, podemos inferir la disyunción de ese enunciado con cualquier otro.

Con las tres reglas anteriores, podemos mostrar que $p \vee q$ ha de ser verdadero siempre que $p \,\&\, q$ sea verdadero. Lo hacemos por medio de la deducción representada en (6).

(6)

$p \,\&\, q$	
p	(por Eliminación de la Conjunción)
$p \vee q$	(por Introducción de la Disyunción)

En una deducción mostramos, paso a paso, cómo se infiere un enunciado a partir de otro y por medio de qué regla se hace. Cada línea es un paso en la deducción, y cada paso corresponde a una aplicación de una regla de deducción.

(7) **Eliminación de la Disyunción**

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \end{array} \Big/ \; r$$

La regla afirma que si hemos establecido que: (i) la disyunción $p \vee q$ es verdadera, (ii) p implica r y (iii) q implica también r, entonces sabemos que r ha de ser verdadero.

Esta regla es un poco más complicada que las precedentes, pero es posible captar intuitivamente su significado. Se puede probar la validez de la regla por medio de una tabla de verdad, si es que se duda de ella. Dado que $((p \,\&\, q) \,\&\, r) \equiv (p \,\&\, (q \,\&\, r))$ combinamos los tres enunciados directamente por medio de

(8)

$((p \vee q)$	&	$(p \rightarrow r)$	&	$(q \rightarrow r))$	$\rightarrow$	r
t t t	t	t t t	t	t t t	t	t
t t t	f	t f f	f	f t f	f	t f
t t f	t	t t t	t	f t t	t	t
t t f	f	t f f	f	f t t	f	t f
f t t	t	f t t	t	t t t	t	t
f t t	t	f t t	f	f t f	f	t f
f f f	f	f t t	t	f t t	t	t
f f f	f	f t f	f	f t t	f	t f
	=		≡		≡	

Una regla de deducción es como una inferencia. Los enunciados en la parte superior izquierda de la barra son las premisas y el enunciado en la parte inferior derecha de la barra es la conclusión. Para comprobar por medio de una tabla de verdad si la inferencia de premisas a conclusión es correcta, ponemos entre paréntesis las premisas, las unimos mediante conjunciones y, finalmente, colocamos un signo de implicación entre la conjunción de las premisas y la conclusión.

(9) **Introducción de la Doble Negación**

$p / \sim \sim p$

(10) **Eliminación de la Doble Negación**

$\sim \sim p / p$

(11) **Introducción de la Equivalencia**

$$\begin{matrix} p \rightarrow q \\ q \rightarrow p \end{matrix} \Big/ \; p \equiv q$$

(12) **Eliminación de la Equivalencia**

$p \equiv q \; / \; (p \rightarrow q) \; \& \; (q \rightarrow p)$

Las últimas cuatro reglas son tan evidentes que no necesitan de especial comentario. Puede probarse la corrección de cada una de ellas por medio de una tabla de verdad.

(13) **Eliminación de la Implicación**

$$\begin{matrix} p \rightarrow q \\ p \end{matrix} \Big/ \; q$$

Esta regla dice que si sabemos que p implica q y que p es verdadero, entonces sabemos también que q ha de ser verdadero. Esta regla se llama habitualmente **modus ponens.**

Las reglas que hemos considerado hasta ahora nos dicen qué conclusión puede sacarse de un determinado conjunto de premisas. Para usar de las reglas necesitamos tener las premisas adecuadas. En otro caso las reglas no pueden aplicarse.

Ahora bien, el sistema deductivo nos da —y esto es importante— una regla o método que nos permite razonar sin tener premisas de las que partir.

Antes de dar la regla explícitamente, podemos dar un ejemplo en castellano corriente.

(14)

Supuesto:	Tomás es más alto que Jorge
Supuesto:	Jorge es más alto que Luis
En este caso:	Tomás es más alto que Luis
Conclusión:	Si Tomás es más alto que Jorge y Jorge es más alto que Luis, entonces Tomás es más alto que Luis.

El razonamiento expresado en (14) parece intuitivamente correcto. Nótese que no sabemos nada de la altura de Tomás, Jorge y Luis. Sólo suponemos que Tomás es más alto que Jorge y que Jorge es más alto que Luis. A partir de estos supuestos, concluimos que Tomás es más alto que Luis, puesto que sabemos que 'más alto' es una relación transitiva. En base a este razonamiento concluimos la implicación que aparece al final de la deducción. Esta conclusión sigue siendo verdadera independientemente de cuáles sean, en concreto, las estaturas de Tomás, Jorge y Luis. Siempre que deducimos un enunciado de un supuesto, podemos deducir una afirmación condicional, cuya verdad está asegurada por la regla de **Condicionalización.**

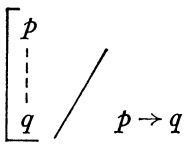
En (15) damos una versión formal de (14), con T por 'más alto que'.

(15)

$T(t, j) \,\&\, T(j, l)$	
$T(t, l)$	por la transitividad de T
$[T(t, j) \,\&\, T(j, l)] \rightarrow T(t, l)$	por Condicionalización

La explicación de la línea o paréntesis angular a la izquierda de la deducción es la siguiente: cada vez que introducimos un supuesto en una deducción, lo marcamos con un paréntesis angular. Este paréntesis se continúa hasta que se elimina el supuesto, lo que se logra mediante el empleo de la regla de condicionalización. Damos esta regla en (16) bajo el nombre de Introducción de la Implicación, lo cual nos brinda una terminología paralela a la de las otras conectivas lógicas.

(16) Introducción de la Implicación

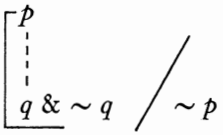


La regla dice que si podemos deducir q de p por medio de reglas del sistema deductivo, podemos inferir también $p \rightarrow q$ por la regla de Introducción de la Implicación (o Condicionalización). Nótese que p no es una premisa en la deducción; es sólo un supuesto introducido como

apoyo para el razonamiento, y la validez de la inferencia no depende de la verdad de este supuesto.

Otra regla relativamente complicada es la regla de Introducción de la Negación. Se formula de la siguiente manera.

(17) Introducción de la Negación



La regla afirma que si podemos mostrar que un supuesto conduce a una contradicción, podemos inferir la negación de ese supuesto.

Veamos un ejemplo del uso de esta regla. Consideremos en primer lugar el siguiente razonamiento.

(18) (*a*) Si es de noche, Apolo está dormido
(b) Apolo no está dormido

(c) No es de noche

Este razonamiento es, intuitivamente, correcto y tiene la forma lógica de (19). Este tipo de razonamiento se suele llamar **modus tollens** en la bibliografía lógica.

(19)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

Esta inferencia puede justificarse por medio de una tabla de verdad, pero también podemos derivar la conclusión de (19) en el sistema deductivo, a partir de las dos premisas. Tl hacerlo utilizaremos la regla de Introducción de la Negación.

(20)

(a)	$p \rightarrow q$	premisa
(b)	$\sim q$	premisa
(c)	p	supuesto
(d)	q	de (a) y (c) por Eliminación de la Implicación (es decir, modus ponens)
(e)	$q \,\&\, \sim q$	de (b) y (d) por Introducción de la Conjunción
(f)	$\sim p$	por Introducción de la Negación

El método de la reductio ad absurdum o razonamiento indirecto queda introducida en el sistema deductivo por medio de la regla de Introducción de la Negación. Si queremos deducir la conclusión (f) a partir de las premisas (a) y (b), empezamos suponiendo la negación de la conclusión que buscamos. Como vemos, este supuesto conduce a una contradicción. Esto significa que la negación de la conclusión (el supuesto) es falsa, lo cual a su vez implica que la conclusión deseada ha de ser verdadera.

Vamos a dar ahora dos reglas para los cuantores.

(21) **Singularización Universal** (primera versión)

Esta regla dice que si sabemos que cierto predicado se predica de todos los individuos, podemos inferir que se predica de todos y cada uno de los individuos, por ejemplo de *a*. De hecho la regla (21) no está formulada con la suficiente generalidad. La regla debería decir que siempre que todos los individuos satisfacen un enunciado abierto dado, también lo hace cada individuo particular. Podemos escribir esto del modo siguiente.

(22) **Singularización Universal** (segunda versión)

$\forall x\ \alpha(x)/\alpha(a)$

en donde $\alpha(x)$ significa que x aparece libre en α y $\alpha(a)$ significa que a reemplaza todas las apariciones libres de x en α.

Ejemplo: Consideremos el razonamiento con que comenzamos nuestra discusión de la lógica de predicados. En (23) se deduce la conclusión 'Bruce es un alce' a partir de las dos premisas del razonamiento, las líneas (a) y (b) de la deducción.

(23)

(a)	$\forall x\,(M(x) \rightarrow C(x))$	
(b)	$M(b)$	
(c)	$M(b) \rightarrow C(b)$	de (a) por Singularización Universal
(d)	$C(b)$	de (a) y (c) por modus ponens

(24) **Generalización Existencial**

$$F(a) \;/\; \exists x\, F(x) \qquad \text{o, en forma más general} \qquad \alpha(a) \;/\; \exists x\, \alpha(x)$$

La regla (24) dice que siempre que un enunciado abierto es satisfecho por un individuo particular, digamos *a*, entonces podemos deducir correctamente que hay algo o alguien que satisface el enunciado abierto en cuestión.

En la deducción siguiente veremos cómo operan algunas de las reglas

(25)

(a) $\forall x F(x, b)$	supuesto
(b) $F(a, b)$	de (a) por Singularización Universal
(c) $\exists x F(x, b)$	de (b) por Generalización Existencial
(d) $\forall x F(x, b) \rightarrow \exists x F(x, b)$	de (a) y (b) por Condicionalización

Por medio de la regla de Condicionalización, junto con las otras reglas de la deducción, estamos capacitados para derivar todos los enunciados lógicamente verdaderos a partir de un conjunto vacío de premisas. Partiendo de un enunciado lógicamente verdadero, podemos deducir otros enunciados lógicamente verdaderos. A partir de una contradicción se derivan tanto los enunciados lógicamente verdaderos como los lógicamente falsos. Esto significa que de una contradicción se sigue lógicamente cualquier cosa. Esto puede sonar muy abstracto, pero es interesante ver que en el lenguaje natural existe una construcción que expresa justamente esta idea.

(26) Si el cielo es de color rojo con pintas verdes, yo soy el Rey de Nueva Guinea.

Es fácil ver que cualquier enunciado se sigue de una contradicción. Sea $p \,\&\, \sim p$ que es, obviamente, una contradicción. Partiendo de este enunciado, podemos derivar un enunciado cualquiera q. La razón es que el enunciado $(p \,\&\, \sim p) \rightarrow q$ no puede ser falso. Para que este enunciado condicional fuera falso tendría que ser verdadero el primer enunciado y falso el segundo. Sin embargo esto no puede ocurrir nunca, puesto que el primer enunciado (es decir, la contradicción) es siempre falso.

En relación con las reglas de deducción, podemos hacer algunas observaciones sobre los llamados **sistemas axiomáticos.**

Es una antigua idea la de que toda ciencia debe incluir afirmaciones de dos tipos. El primer tipo de afirmación son los **axiomas.** Un axioma es un enunciado cuya verdad se acepta sin demostración. Estos enunciados son intuitivamente verdaderos y deberían ser lo suficientemente simples como para dar una base sólida a la ciencia en cuestión. El segundo tipo de afirmación son los **teoremas.** Un teorema es un enunciado que se sigue de los axiomas por medio de reglas de deducción. Las Matemáticas constituyen un dominio científico en el que se han usado ampliamente sistemas axiomáticos. Como ejemplo de un área teórica difícilmente axiomables propondríamos la crítica literaria. No es fácil imaginar un conjunto de axiomas apartir de los cuales se pueda deducir que los

dramas de la última época de Strindberg presentan una desconexión con la realidad.

Se han realizado varios intentos de construir la lógica como un sistema axiomático. Un axioma posible para la lógica sería la **ley de tercio excluso:** $p \vee \sim p$. Esta ley afirma que un enunciado o es verdadero o es falso y que no hay otras alternativas. Muchos lógicos aceptan esto como un enunciado intuitivamente verdadero y lo proponen como axioma de la lógica proposicional. Hay que tener en cuenta, sin embargo, que no todos los lógicos están de acuerdo en considerar esta ley como axioma lógico (cfr. más abajo el tema de la presuposición); por lo tanto, han de encontrar axiomas alternativos. Esto implica la posibilidad de hablar de lógicas diferentes. En los últimos tiempos, algunos teóricos han eliminado la condición de que los axiomas deberían ser intuitivos (por ejemplo, en geometría).

Siempre que se infieren teoremas a partir de axiomas, sea en la disciplina que sea, se usa un determinado conjunto de reglas de deducción. A continuación vamos a dar algunos ejemplos que muestran que las reglas del sistema deductivo se usan también en razonamientos realizados en el lenguaje natural cotidiano.

6.2. REGLAS DE DEDUCCION EN LA CONVERSACION COTIDIANA

En la sección anterior hemos estudiado la estructura y función de las reglas del sistema deductivo en lógica. En esta sección veremos cómo se utilizan estas reglas en razonamientos realizados en lenguaje ordinario. Es muy poco lo que se ha hecho en este campo y no existe, en el mundo real, una teoría del razonamiento en lengua natural. Es de esperar que una teoría de este tipo aparezca en un mundo posible futuro.

Para estudiar el papel de las reglas de deducción en el lenguaje natural, hemos de estudiar la forma de estructuras sintácticas más amplias que el enunciado: se precisa una gramática del discurso más que una gramática del enunciado. Los sistemas sintácticos conocidos hoy en día no van más allá del nivel del enunciado; sin embargo, se está trabajando en este área, así que quizá el futuro nos brinde la gramática del discurso que necesitamos.

La única restricción impuesta a las reglas de un sistema deductivo en lógica es que deben dar lugar sólo a inferencias válidas, es decir, cuando es verdad lo que aparece a la izquierda de la barra, entonces lo que aparece a la derecha ha de ser también verdad. No es evidente, sin embargo, que todas las reglas de la sección precedente se puedan usar cómodamente en el razonamiento cotidiano. El siguiente razonamiento es 'lógico', pero, desde luego, inaceptable en la conversación normal.

(1) A: Me he comprado los *Principia* de Russell
B: Ah, sí, ya veo, te has comprado los *Principia* de Russell o *Aspectos de la Teoría de la Sintaxis* de Chomsky

La afirmación de B resulta un tanto inadecuada aunque siga la regla de Introducción de la Disyunción. Esto no significa que la Introducción de la Disyunción no se use nunca en el lenguaje. Sólo hemos mostrado que la regla no puede usarse indiscriminadamente para 'generar' discursos en la conversación cotidiana. Naturalmente, pueden existir otros casos en que la regla se use.

(2)

A: ¿Crees que habrá guateque esta noche?	q?
B: No lo sé, pero lo que está claro es que si Marga está en casa, entonces hay guateque	$p \rightarrow q$
A: Pero Marga está en casa	p
A y B (alegremente, a coro): Entonces habrá guateque esta noche	q

Como vemos, en esta ocasión se usa el modus ponens.

Aunque no tenemos muchas pruebas para apoyarnos, juzgamos que el método de razonamiento llamado en lógica razonamiento indirecto se usa en la conversación cotidiana. Veámoslo en el siguiente ejemplo.

(3)

A: Creo que voy a ir a visitar a Knut.	$\sim p$
B: Knut no está en casa.	
A: ¿Cómo lo sabes?	
B: Si estuviera en casa, su coche estaría en el garaje, pero no está allí.	$p \rightarrow q$ $\sim q$

Vemos en este ejemplo un fenómeno muy común en el lenguaje cotidiano: no aparecen explícitamente en el discurso todos los pasos del razonamiento. Una versión formal de (3) sería algo así como (4) y una versión formalizada de (4) es idéntica al razonamiento (20) en la sección precedente (6.1).

(4) (a) Si Knut está en casa, su coche está en el garaje
(b) El coche de Knut no está en el garaje
(c) Supongamos que Knut está en casa
(d) Entonces el coche de Knut está en el garaje
(e) Pero sabemos que el coche de Knut no está en el garaje; suponer que Knut está en casa nos lleva a una contradicción
(f) Por lo tanto, Knut no está en casa

Otro punto muy importante en conexión con los razonamientos realizados en el lenguaje natural es que a menudo no expresamos las premisas a partir de las cuales sacamos una conclusión. Veamos el siguiente ejemplo.

(5) A: Mari se ha casado con un sueco
B: ¡Dios mío!, Mari se ha casado con un cazador de osos polares

Es fácil ver que semejante conclusión no se sigue de la premisa dada por A. Para que la inferencia fuera correcta tendríamos que añadir la siguiente premisa: 'Todos los suecos son cazadores de osos polares'. Las premisas implícitas como ésta pueden entenderse como un conocimiento de base que comparten el hablante y el oyente. (6) es una versión menos tajante de (5).

(6) A: Mari se ha casado con un sueco
B: Vaya, probablemente Mari se habrá casado con un cazador de osos polares.

En este caso se trata de otra premisa implícita: 'La mayoría de los suecos son cazadores de osos polares'. En la conversación diaria modificamos a menudo nuestras conclusiones por medio de adverbios que expresan cierto grado de probabilidad. En base a esto, podemos dar las variables que cumplen un papel en este tipo de razonamiento.

(7) premisas → atenuaciones → conclusión
↑
supuestos implícitos
↑
información de base (conocimiento compartido por el hablante y el oyente)

Las atenuaciones pueden ser o bien del 'tipo probabilístico' que hemos visto en el ejemplo (6) o bien del tipo 'la conclusión se sigue a menos que ocurra esto o lo otro', donde 'esto' y 'lo otro' describen situaciones en que la conclusión no se sigue de las premisas.

El fin de esta sección era mostrar que las reglas del sistema deductivo pueden ser un instrumento útil para analizar el razonamiento realizado en lenguaje ordinario, y al revés, para describir y formalizar tipos de razonamiento todavía no tratados en un sistema formal deductivo.

EJERCICIOS

1. ¿Qué regla de deducción nos permite deducir $\exists xFx$ a partir de $F(d)$?

2. Mostrar, paso a paso, cómo se puede deducir $q \rightarrow p$ a partir de $p \equiv q$.

3. Evidentemente, deducir p a partir de p mismo, es una inferencia válida. Sin embargo no hay ninguna regla en el sistema deductivo, tal como lo hemos presentado, que tenga la forma p / p. Mostrar cómo se puede deducir p a partir de p aplicando alguna de las reglas dadas en este capítulo.

4. Dada la siguiente deducción, indicar después de cada línea qué regla se ha empleado para inferirla.

   (a) $(p \rightarrow q)$ & $(q \rightarrow r)$
   (b) $p \rightarrow q$
   (c) $q \rightarrow r$
   (d) p
   (e) q
   (f) r
   (g) $p \rightarrow r$
   (h) $((p \rightarrow q)$ & $(q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

5. Derívese p a partir de las premisas $p \equiv q$ y q por medio de las reglas dadas en este capítulo.

6. El siguiente párrafo puede analizarse como una deducción. Indíquese cómo y por medio de qué reglas se sigue la conclusión de las premisas.
   Gunnar era sueco y un héroe. Todos los suecos eran borrachines y todos los héroes, asesinos. Por lo tanto, Gunnar era un borrachín y un asesino.

7. Analizar el siguiente razonamiento en términos del sistema deductivo. Indíquese qué reglas se han usado.
   Tanto Olaf como Gunnar eran vikingos. Por lo tanto no es verdad que Gunnar no fuera vikingo.

7

Lógica modal

7.1. OPERADORES MODALES

La lógica proposicional y de predicados, tal como la hemos formulado en los capítulos precedentes, no habla más que de un mundo posible cada vez. Sin embargo, al interpretar ciertos enunciados en el lenguaje natural, desearíamos hablar de las relaciones entre mundos posibles diversos. Vimos un ejemplo en la página 25. Otro ejemplo sería:

(1) Es posible que llueva mañana

Cuando alguien pronuncia este enunciado normalmente no está seguro de cómo será el tiempo al día siguiente: puede imaginar varias posibilidades. En otras palabras, el mundo, con el aspecto que ofrezca mañana, es para él uno entre varios mundos posibles. Lo que afirma al enunciar (1) es que existe al menos uno de esos mundos posibles en el que lloverá mañana.

El siguiente enunciado puede entenderse de manera similar.

(2) Es seguro que mañana lloverá

(2) significa que cualquiera que sea el mundo posible que mañana sea real, en él lloverá. En otras palabras, de todo mundo posible se puede decir que en él lloverá mañana.

Podemos por lo tanto definir del siguiente modo 'posible' y 'seguro'.

posible = verdadero en algún mundo posible
seguro = verdadero en todo mundo posible

Los mundos posibles de que hemos hablado en estos ejemplos son, en mayor o menor medida, compatibles con lo que sabemos. El lógico está particularmente interesado en mundos que son lógicamente posibles, i.e. en todo mundo que pueda ser descrito de modo consistente, aunque estén excluidos por algún conocimiento que, de hecho, tengamos. Por ejemplo, en algún mundo lógicamente posible Ud. no está leyendo en este momento un libro de lógica para lingüistas sino una revista de deportes, aunque normalmente esta posibilidad no se consideraría realizable.

De lo que es verdadero en todo mundo posible se dice que es **necesario** y no simplemente que es 'seguro'. Conceptos como los de 'necesario' y 'posible' son los que se estudian en **lógica modal** [1]. Podemos ver fácilmente la motivación de la elección de este término, si nos damos cuenta que los enunciados como (1) o (2) se pueden parafrasear mediante verbos que (en inglés o alemán, por ejemplo (N. del T.)) se llaman **verbos modales,** como

(3) Puede que llueva mañana

Otros lenguajes utilizan la categoría verbal del modo (latín: *modus*) en tales casos.

También se expresan los conceptos modales por medio de adverbios tales como *posiblemente, ciertamente* [2].

Los lógicos utilizan un formalismo que es bastante similar a las expresiones que utilizamos en el lenguaje natural. Introducimos dos nuevas constantes, M y N [3]. Se pueden poner delante de cualquier enunciado para producir un nuevo enunciado. Mp significa, por lo tanto, 'es posible que p' y Np, 'es necesario que p'. M y N son los **operadores modales.** Es posible iterar, es decir, repetir, los operadores modales y también

---

[1] La introducción standard a la lógica modal es Hughes & Cresswell (1968). Otros libros que tratan problemas semánticos en lógica modal son Hintikka (1969) y Rescher (1968). Más abajo se encontrarán otras referencias.

[2] Puede ser conveniente apuntar, para aquellos lectores familiarizados con la teoría de la probabilidad, que esta teoría se basa en conceptos que son relativamente similares a los que subyacen a la lógica modal. El cálculo de la probabilidad de, pongamos, el que se dé un cierto resultado en un juego con dados se basa en el supuesto de que existe una serie de combinaciones igualmente probables de tiradas simples. Cada una de esas combinaciones posibles o resultados es comparable a un mundo posible. Las probabilidades se ordenan habitualmente en una escala de 1 (lo que es totalmente seguro) a 0 (lo que no puede ocurrir). En la terminología de la lógica modal, 1 es equivalente a 'verdadero en todo mundo posible' y 0 a 'no verdadero en ningún mundo posible'.

[3] Hay una confundente variedad de alternativas notacionales. En vez M y N algunos lógicos utilizan M y L, otros $\Diamond$ y $\Box$, por no citar notaciones más extrañas que a veces se encuentran. En la notación polaca, que se introdujo en la página 59, N se utiliza para la negación en lógica proposicional.

combinarlos con las conectivas proposicionales para lograr expresiones de cualquier grado de complejidad, por ejemplo,

(4) $MN \sim p \vee Nq$

Existen ciertas relaciones lógicas entre los dos operadores modales. En los siguientes enunciados, lógicamente verdaderos, se ponen de manifiesto estas relaciones.

(5) $Mp \equiv \sim N \sim p$ 'Es posible que p sii no es necesario que no p'

(6) $Np \equiv \sim M \sim p$ 'Es necesario que p sii no es posible que no p'

Podemos expresar (5) y (6) en términos de mundos posibles diciendo

(5') p es verdadero en algún mundo posible sii la negación de p no es verdadera en todo mundo posible

(6') p es verdadero en todo mundo posible sii la negación de p no es verdadera en ningún mundo posible.

En (5') y (6') se ve fácilmente que (5) y (6) son en realidad las contrapartidas modales de las verdades lógicas formuladas en la página 85, fundadas en las relaciones entre los cuantores universal y existencial. La existencia de esta conexión entre los operadores modales y los cuantores es una de las intuiciones fundamentales de la semántica lógica.

Los operadores modales pueden introducirse en la lógica de enunciados o en la lógica de predicados. En el primer caso obtenemos lo que se llama 'lógica proposicional modal'; en el segundo, un sistema que se puede llamar 'lógica modal de predicados'.

7.2. IMPLICACION ESTRICTA

En el capítulo de lógica proposicional analizamos la conectiva proposicional $\rightarrow$, la 'implicación material', que podemos leer como 'si... entonces'. Hicimos mención de que esta conectiva no tiene el significado del *si* castellano. Por ejemplo, si p es un enunciado falso, $p \rightarrow q$ es siempre verdadero, independientemente del valor de verdad y del significado de q.

Sería difícil afirmar algo semejante para el *si* castellano. Por ejemplo, (1) no se consideraría habitualmente como un enunciado verdadero.

(1) Si Suecia está en Africa, Japón es una república

Los operadores modales ofrecen una formalización alternativa de las construcciones con *si*. Supongamos que simplemente añadimos N a la izquierda de la implicación material.

(2) $N(p \rightarrow q)$

Esto significaría que $p \rightarrow q$ es verdadero en todo mundo posible, es decir, que no hay ningún mundo en que p sea verdadero y q falso. Podemos entender 'todos los mundos' como 'todos los mundos lógicamente posibles' o como 'todos los mundos posibles en la práctica'. En las dos interpretaciones resulta concecible el que Suecia esté en Africa sin que Japón sea una república. Por lo tanto, si decidimos formalizar (1) en la forma (2), podemos evitar algunos de los problemas que se planteaban con la implicación material [4]. A menudo se usa una conectiva en lógica modal, $\dashv$, que se define de tal manera que $p \dashv q$ (léase 'p arpón q') es equivalente a (2), interpretando N como 'lógicamente necesario'. Llamamos 'implicación estrista' al $\dashv$. Nótese que la implicación estricta no es una conectiva veritativo-funcional: el valor de verdad de $p \dashv q$ no puede calcularse a partir de los valores de verdad de p y q.

También podemos interpretar $p \dashv q$ como una afirmación acerca de los conjuntos-verdad de p y q. Si p es verdadero sólo cuando q es verdadero, el conjunto verdad de p ha de ser un subconjunto (no necesariamente propio) del conjunto-verdad de q.

7.3. OTRAS MODALIDADES

Hay una serie de conceptos, aparte de los ya indicados, que tienen propiedades lógicas similares. Consideremos por ejemplo la familia de conceptos que tienen que ver con lo obligatorio y lo permitido. Estos conceptos se han formalizado en lo que se ha dado en llamar **lógica deóntica.** En vez de los operadores modales M y N, la lógica deóntica utiliza dos **operadores deónticos** que habitualmente se designan como O (de 'obligatorio') y P (de 'permitido'). Por lo tanto, Op se lee como 'es obligatorio que p' y Pp como 'está permitido que p'. Estos operadores se pueden interpretar también en términos de mundos posibles. El conjunto de mundos posibles que aquí se toman en consideración es el

[4] El hablar de 'evitar algunos de los problemas de la implicación material' es deliberado, porque es posible que queden algunos sin resolver. Uno de los problemas que aparecen al interpretar *si... entonces* como una implicación estricta es que cuando el enunciado con *si* es falso en todo mundo posible, el enunciado en su conjunto ha de ser verdadero, desde el punto de vista de esa formalización. Así, el siguiente enunciado sería verdadero, puesto que el enunciado precedido de *si* es falso.

Si llueve y no llueve, Londres es la capital de Francia.

Quizá esto no sea una consecuencia totalmente negativa. Como señalamos en la sección 6.1, a veces se utilizan enunciados así para mostrar lo absurdo de una afirmación, como se pone de manifiesto en el enunciado (26) de esa sección.

conjunto de mundos posibles 'ideales' con respecto a algún sistema moral o legal; por ejemplo, el conjunto de mundos en que todas las personas actuaran de acuerdo con los diez mandamientos. *Op* se interpreta entonces como 'verdadero en todos los mundos legal o moralmente ideales' y *Pp* como 'verdadero en algún mundo moral o legalmente ideal'. La idea es que un sistema moral o legal especifica un conjunto de modos posibles de hacer ordenadamente: Es obligatorio lo que ha de hacerse para no salirse de ese conjunto, y está permitido lo que puede hacerse sin salirse del mismo. Vemos que los operadores deónticos se definen de una manera que es más o menos paralela a las definiciones de los operadores modales: la diferencia estriba en el carácter del conjunto de mundos que se considera. Debido a esto, no resulta sorprendente que las verdades lógicas de la lógica modal tengan habitualmente contrapartidas exactas en la lógica deóntica. Así, por ejemplo, el enunciado (5) en la sección 7.1 tiene su paralelo en (1), que es también lógicamente verdadero.

(1) $Pp \equiv \sim O \sim p$

Pero también hay diferencias entre los dos tipos de lógica. Así, dado que nuestro mundo real es, desde luego, un mundo posible aunque no sea, al menos tan claramente, un mundo moralmente ideal, (2) (a-b) son enunciados lógicamente verdaderos (si *N* se interpreta como 'lógicamente necesario') mientras que las contrapartidas deónticas (3) (a-b) pueden ser falsas.

(2) (a) $Np \rightarrow p$
(b) $p \rightarrow Mp$

(3) (a) $Op \rightarrow p$
(b) $p \rightarrow Pp$

El lenguaje natural refleja también estas relaciones entre los conceptos modales y deónticos. En casi todos los idiomas, las palabras y morfemas que se utilizan para expresar la certeza, la necesidad y la posibilidad se usan también para expresar prohibiciones y permisos (por ejemplo, en castellano, *haber de* y *poder*).

Como hemos dicho, la lógica modal y la deóntica se diferencian fundamentalmente en el tipo de mundo que se toman en consideración al interpretar los operadores. De hecho, esta idea no es sólo verdadera respecto a estos dos tipos de lógica: variando únicamente las condiciones que se imponen sobre los mundos posibles que se toman en consideración, se pueden formalizar un amplio número de conceptos. Además de 'posibilidad lógica', 'posibilidad práctica' y 'permisibilidad', se puede pensar en 'modalidades' tales como 'posibilidad física', 'conceptibilidad', 'deseabilidad', 'descriptibilidad', etc.

Los lógicos usan nombres tomados del griego para referirse a conceptos como éstos, hablando de **lógica alética** (que se refiere a la posi-

bilidad lógica), **lógica epistémica** (que trata del conocimiento y las creencias) e incluso de una **lógica bulomaica** (que trata del deseo). A parte de resultar un tanto imponentes para los que los oyen por primera vez, estos términos pueden conducir a la errónea impresión de que estos sistemas se diferencian entre sí como la lógica de enunciados de la de predicados, siendo así que, en lo que toca a la sintaxis, son prácticamente idénticas, residiendo las diferencias en la interpretación de los operadores. Sin embargo, en ciertos casos, se llega a sistemas que también sintácticamente son más complejos que la lógica modal ordinaria. Por ejemplo, se pueden formalizar las llamadas **actitudes proposicionales** (creencias, deseos, esperanzas, temores, etc.) poniendo suscritos a los operadores de tal modo que aquellos relacionen a estos con individuos con la actitud en cuestión. Por ejemplo, en el sistema de lógica epistémica formulado por el finlandés Jaakko Hintikka (cfr. Hintikka (1962)) se utilizan fórmulas tales como $B_a p$. Esta fórmula en concreto significa '*a* cree que *p*'. En el sistema de Hintikka, esto se interpreta como 'en todos los mundos posibles consistentes con las creencias de *a*, *p* es verdadero'. (Cfr. página 162, una discusión sobre esta interpretación de las actitudes proposicionales).

Un concepto importante al discutir diferentes tipos de modalidades es la relación de **accesibilidad** o **alternatividad.** Podemos representarnos el conjunto de mundos posibles que queremos tomar en consideración de tal modo que queden definidos por tener cierta relación con nuestro mundo o con otro mundo. Una consecuencia importante de este modo de ver las cosas es que el conjunto puede variar según cuál sea el mundo que tomemos como punto de partida. Para entender por qué esto representa un rasgo favorable del sistema, partamos del concepto de 'conceptibilidad' e interpretemos $\dot{M}p$ como 'es concebible que *p*'. Supongamos ahora que el que algo sea concecible depende de la capacidad mental de las criaturas pensantes que de hecho existen. Dado que en otro mundo posible puede haber seres humanos u otras entidades pensantes que son más o menos inteligentes que los que existen en nuestro mundo, se sigue que lo que es concebible en un mundo puede no serlo en otro. Diremos entonces que cada mundo tiene un conjunto de mundos que son accesibles desde él vía la relación de conceptibilidad, y que este conjunto cambia de mundo a mundo.

De manera general, entonces, cada modalidad corresponderá a una relación de accesibilidad. Al igual que todas las relaciones, las relaciones de accesibilidad se pueden caracterizar por medio de propiedades formales tales como la simetría, la reflexividad o la transitividad (cfr. p. 88). Por ejemplo, estudiemos las diferencias arriba indicadas entre la posibilidad lógica y la permisibilidad. Tal como dijimos, vivimos en un mundo lógicamente posible pero no necesariamente en un mundo moralmente ideal. Esta idea se puede plantear diciendo que el conjunto de mundos

accesibles a nuestro mundo incluye nuestro propio mundo en el caso de la posibilidad lógica pero no en el caso de la permisibilidad moral. Vemos entonces que sólo la primera relación de accesibilidad podría ser reflexiva (puesto que en el segundo caso nuestro mundo no está en relación de accesibilidad consigo mismo).

Los lógicos han empleado una notable cantidad de tiempo investigando qué sucede cuando se supone que la relación de accesibilidad tiene tales o tales otras propiedades. Podemos referirnos de nuevo a nuestro análisis de la posibilidad lógica y de la permisibilidad. El hecho de que (3) (a-b) no sean verdades lógicas es una consecuencia directa de la no reflexividad de la relación de accesibilidad deóntica.

Para los que estén interesados en leer más sobre la lógica modal, puede resultar útil saber que los sistemas conocidos en la bibliografía lógica como S_4, S_5 y T difieren fundamentalmente en las propiedades que se atribuyen a la relación de accesibilidad, lo que trae como consecuencia que los conjuntos de verdades lógicas en estos sistemas varíen ampliamente.

7.4. PROBLEMAS RELACIONADOS CON EL ALCANCE Y LA IDENTIDAD EN LA LOGICA MODAL

7.4.1. *Ambigüedades 'de dicto' - 'de re'*

Al tratar de la lógica de predicados, analizamos ciertos problemas relacionados con el alcance de los cuantificadores. En la lógica modal los problemas de alcance también son importantes, quizá más que en lógica de predicados. Dos son las razones de esto. En primer lugar, el número de operadores es mayor en la lógica modal, y, por lo tanto, hay más posibilidades de combinarlos de modos diferentes. En segundo lugar, al combinar los operadores modales con los cuantores, surgen problemas semánticos que tienen importancia tanto desde un punto de vista filosófico en general como para el estudio del lenguaje natural. Podríamos buscar ejemplos de ambigüedades de alcance en relación con los operadores *M* y *N*, pero pueden resultar más fácil de captar otros ejemplos, que hacen intervenir actitudes proposicionales. Hemos mencionado más arriba (cfr. sección (7.3)) la lógica epistémica de Hintikka, en la que $B_a p$ se interpreta como '*a* cree *p*' o 'en todo mundo posible consistente con las creencias de *a*', *p* es verdadero. Vamos a usar la expresión 'los mundos de creencia', para referirnos a los mundos consistentes con las creencias de *a*.

Estudiemos ahora el siguiente enunciado.

(1) Juan cree que todos los premios Nobel son idiotas

El problema que aquí se plantea es el de que no es claro a quién se refieren las creencias de Juan. Podría muy bien ocurrir que Juan estuviera equipocado respecto a la identidad de los premios Nobel. Supongamos, por ejemplo, que Juan ha confundidos a los profesores Casto y y Castor y cree, equivocamente, que Casto ganó el premio Nobel, cuando en realidad lo ganó Castor. Supongamos, además, que Juan considera (correctamente) que Casto es un genio y Castor un idiota. En tal situación, ¿(1) es verdadero o falso? Por un lado, si se le pregunta a Juan 'Crees que todos los premios Nobel son idiotas?' contestará que no, puesto que piensa que Casto ganó un premio Nobel y es un genio. Por otro lado, se podría afirmar que de todos modos es verdad que Juan cree que todos los que, de hecho, son premios Nobel son idiotas. Esto se puede expresar de modo más natural en (1').

(1') Juan cree de todos los premios Nobel que ellos son idiotas

En términos de mundos posibles el problema se reduce a la cuestión de si estamos hablando de premios Nobel en el mundo actual o en los mundos de creencia de Juan; de otro modo, la cuestión es cómo determinar el rango del cuantor *todos* en (1). La ambigüedad de (1) remite a dos posibilidades diferentes. Representándolas en el sistema de Hintikka:

(2) (a) $B_a\,(\forall x(F(x) \rightarrow G(x)))$
(b) $\forall x\,(F(x) \rightarrow B_a\,(G(x)))$

en donde F es 'es un premio Nobel' y G es 'es un idiota'. Aquí la diferencia estriba en las posiciones relativas del cuantor universal y del operador de creencia. En (2) (a) el objeto de la creencia de Juan es la proposición representada por la fórmula $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$. En la semántica de Hintikka, esto significaría que en todos los mundos de creencia de Juan todos los premios Nobel (es decir, los individuos que son premios Nobel en estos mundos) son idiotas. Por otro lado en (2) (b) Juan cree todo un conjunto de proposiciones, esto es, de cada premio Nobel (de todo individuo que es premio Nobel en el mundo real) cree que ese individuo es idiota. Con términos tomados de una larga tradición filosófica, podemos decir que en el primer caso tenemos una modalidad '*de dicto*', mientras que en el segundo nos las habemos con una modalidad '*de re*'. La motivación de estos términos se hace transparente si analizamos otro ejemplo, en el que interviene un sintagma nominal definido en vez de un cuantor universal.

(3) Juan cree que el hombre que le robó era pelirrojo

El punto crítico respecto a la ambigüedad de (3) es cuando Juan está equivocado respecto a la identidad del hombre que le robó. El sintagma nominal *el hombre que le robó* puede entenderse como denotando al

hombre que, de hecho, robó a Juan, o bien al hombre de quien Juan piensa que le robó. La primera posibilidad es la interpretación *de re*; la segunda, *de dicto*. Ahora se puede entender mejor qué significan los términos *de re* y *de dicto*. *De re* en latín significa 'acerca de la cosa' y 'de dicto' significa 'acerca de lo dicho'. En este contexto entendemos esto como significando que en el caso *de re*, lo que importa es 'la cosa en el mundo real; es decir, aquello a lo que la descripción se refiere en nuestro mundo, mientras que en el caso *de dicto* lo importante es lo que la descripción dice acerca del objeto al que se refiere.

Todavía no hemos mostrado cómo se puede formalizar un enunciado como (3). El tratamiento de los sintagmas nominales definidos como *el hombre que le robó* —las llamadas descripciones definidas— se estudiará en la sección 9.2, más abajo. Para lograr analizar la ambigüedad de (3) como una diferencia en el alcance de los operadores modales, hemos de usar el llamado operador landa, que estudiaremos en la sección 9.4.

7.4.2. *Especificidad*

Cuando los operadores modales se combinan con el cuantor existencial (o con sus contrapartidas en el lenguaje natural) surgen ambigüedades similares a las estudiadas más arriba. Veamos un ejemplo con un operador deóntico. Estudiemos el enunciado (4)

(4) Juan tiene que hablar con alguien

Los siguientes contextos en torno a (4) ponen de manifiesto que hay al menos dos modos de entenderlo, supuesto que el *tiene que* se usa deónticamente.

(5) (a) Juan no puede continuar viviendo como un ermitaño; tiene que hablar con alguien o se volverá loco

(b) Juan tiene que hablar con alguien cuando venga a Londres, pero ha perdido la carta en la que le dicen con quién ha de hablar

Vemos que sólo en (b) *alguien* se refiere a una persona específica en el mundo real. En (a) decimos que ha de existir alguien con quien Juan tiene que hablar, pero no necesita ser la misma persona en cada mundo. Las dos fórmulas siguientes representan estas dos interpretaciones posibles de (4)

(6) (a) $O\,(\exists x\, T(a, x))$

(b) $\exists x\,(O(T(a, x)))$

donde $T(a, x)$ es 'a habla con x'

De nuevo vemos que la diferencia estriba en las posiciones relativas del operador y el cuantor. Si el cuantor existencial está fuera del alcance del operador deóntico, la fórmula implica la existencia de un individuo en el mundo real, lo que no ocurre si las posiciones son las inversas. Los lingüistas se refieren a las dos interpretaciones de (4) hablando de 'no específica' y 'específica', respectivamente. Sin embargo, hay otro modo de entender este término. Se ha afirmado que un enunciado del tipo de (1) (a) en la sección 5.2, que repetimos aquí como (7), es ambiguo.

(7) Alguien es conservador

La diferencia entre las dos interpretaciones reside en lo siguiente: en un caso el hablante piensa en una persona determinada, pero en el otro caso puede no hacerlo. No existe una opinión unánime respecto a la naturaleza de esta ambigüedad, pero parece claro que no hay un procedimiento natural de representarla en el marco de los sistemas de lógica que hemos estudiado hasta ahora. Nótese que la ambigüedad en cuestión no puede analizarse como una diferencia de alcance, puesto que no hay operadores que se puedan ordenar de manera diferente en la formalización del enunciado.

Por otro lado hay que tener en cuenta que aunque en esta sección hemos mostrado que ciertas ambigüedades del castellano se pueden analizar por medio de fórmulas lógicas que difieren entre sí en el alcance de los operadores, no se sigue de esto que sea necesario entender estas ambigüedades como ambigüedades debidas al alcance. Es posible dar explicaciones diferentes.

7.4.3. *Opacidad*

El concepto de **opacidad** está íntimamente relacionado con la distinción *de re - de dicto*. Para explicar en qué consiste la opacidad, tenemos primero que presentar una 'regla de deducción' que podemos llamar 'sustitución de términos con referencia idéntica'. Estudiemos la siguiente inferencia.

(1) (a) Canuto es pelirrojo
(b) Canuto es el Rey de Dinamarca

(c) El Rey de Dinamarca es pelirrojo

Dado que Canuto y el Rey de Dinamarca son la misma persona, debería ocurrir que todo lo que es verdadero del uno lo sea también del otro. Por lo tanto es posible, de modo general, sustituir el término *el Rey de Dinamarca* por *Canuto* y viceversa sin cambiar el valor de verdad del

enunciado[5]. Hay casos, sin embargo, en que este principio parece llevarnos en una dirección equivocada. Veamos la siguiente inferencia (inválida).

(2) (a) El Rey de Dinamarca podría haber sido otro que Canuto
(b) El Rey de Dinamarca es Canuto

(c) Canuto podría haber sido otro que Canuto

Es claro que (2) (c) no se sigue de (2) (a), por lo menos si entendemos estos enunciados del modo que parece más natural, a saber, interpretando (2) (a) como la afirmación de que otra persona, distinta de Canuto, podría haber reinado en Dinamarca —cosa que no parece anormal, como afirmación— mientras que (2) (c) afirma que podría haber ocurrido que Canuto no fuera idéntico consigo mismo, lo cual parece ser lógicamente contradictorio. En otras palabras, (2) (a) define un contexto en el cual no es posible sustituir términos correferenciales entre sí. Estos contextos se llaman contextos **opacos** (los contextos que no son opacos se llaman **transparentes**).

¿Qué contextos son opacos?, ¿por qué?. Nótese que (2) (a), con la interpretación que hemos dado, es un ejemplo de una lectura *de dicto* de una construcción modal. En general las construcciones modales producen contextos opacos para los sintagmas nominales (en la lectura *de dicto*). A veces, incluso, los términos 'opaco' y 'transparente' se utilizan como sinónimos de *de dicto* y *de re*. Si nos fijamos en la interpretación de tales enunciados en términos de mundos posibles, se verá con claridad por qué es esto así. La afirmación de identidad (2) (b) trata acerca de una relación de identidad en el mundo real. Por el contrario, en (2) (a) hablamos de otro mundo posible, y puede ocurrir que el enunciado de identidad (2) (b) sea falso en ese mundo. Otro modo de plantear esto es decir que, en realidad, (2) (a) no es una afirmación acerca del individuo que de hecho es Rey de Dinamarca.

La idea fundamental acerca de los términos de individuos en contextos opacos es que hemos de considerar no sólo sus extensiones en nuestro mundo, sino también sus extensiones en otros mundos posibles. Veremos en el capítulo de lógica intensional que todo esto puede convertirse en un argumento a favor de la necesidad de postular, junto a la extensión de una expresión, lo que se llama su **intensión.**

El término 'opacidad' fue introducido por Russell y Whitehead en los *Principia Mathematica,* pero los orígenes de la noción se pueden rastrear hasta el famoso artículo *Sinn und Bedeutung* (Sentido y Referencia)

---

[5] Utilizando una locución latina decimos que tales términos son intercambiables *salva veritate,* 'sin cambiar la verdad'.

del matemático alemán Gottlob Frege. Frege hizo notar que la sustitución de términos correferenciales no era posible de manera general en contextos indirectos (en el sentido más amplio de 'contexto indirecto', incluyendo por ejemplo, los complementos de verbos epistémicos como *saber y creer*). Su conclusión fue que en ese tipo de contextos una expresión no tiene su extensión o referencia habitual (*Bedeutung*) sino lo que él llama su extensión oblicua o indirecta (*ungerade*), que se identificaba, según él, con la intensión (*Sinn*) de la expresión. Uno de los ejemplos de Frege se hizo clásico posteriormente con el nombre de la **paradoja de la estrella matutina.** Podemos plantear esta paradoja por medio de la siguiente inferencia (inválida), que es paralela a (2).

(3) (a) Copérnico sabía que la estrella matutina era un planeta
(b) La estrella matutina es el mismo planeta que la estrella vespertina

---

(c) Copérnico sabía que la estrella verpertina es un planeta

(*Estrella vespertina* y *estrella matutina* son nombres diferentes del planeta Venus.) De hecho, el ejemplo no es perfecto, puesto que no queda claro que *estrella matutina* y *estrella vespertina* tenga la misma extensión: se podría argumentar que se refieren a dos aspectos o manifestaciones del planeta Venus ('Venus tal como aparece por las mañanas' y 'Venus tal como aparece por las tardes').

7.4.4. *Identificación mundo a través*

Bajo este rótulo deberíamos tratar el problema de la **identificación mundo-a-través** o identificación transmundana **(cross-world identification)** ¿Qué significa decir que un individuo, pongamos Leif Eriksson, tiene tales y tales propiedades en otro mundo posible? ¿Cómo sabemos nosotros que un individuo en otro mundo es en realidad Leif Eriksson, si en el otro mundo tiene propiedades diferentes de las que tiene en el nuestro? Por ejemplo, si digo

(1) Leif Eriksson podría haberse quedado en casa y no haber descubierto América,

alguien podría argumentar que si Leif Eriksson no hubiese descubierto América, sería otra persona y que por lo tanto no tiene sentido hablar de lo que habría ocurrido si no lo huiera hecho. Tales cuestiones han preocupado a muchos de los que han trabajado en la semántica de la lógica modal. Tradicionalmente se ha pensado que hay dos tipos de propiedades: las **esenciales** o **necesarias** y las **contingentes** o **accidentales.** Si p es una propiedad esencial de Leif Eriksson, entonces Leif Eriksson tiene la propiedad p en todo mundo posible, o, dicho de otra manera, si

algo en algún mundo no tiene la propiedad *p*, entonces ese algo no es Leif Eriksson. Si supiéramos qué propiedades son esenciales y cuáles no, no tendríamos problemas con la identificación mundo-a-través. Sin embargo, no es fácil dar un contenido a la idea de propiedad esencial —por lo menos no lo es para los individuos, para las clases podría ser más sencillo— y se han buscado otras soluciones, que no analizaremos aquí, porque nos llevarían demasiado lejos [6].

7.5. ENUNCIADOS CONTRAFACTICOS

Al estudiar la implicación material (p. 42) tuvimos ya ocasión de mencionar los enunciados condicionales contrafácticos. También hemos dicho (p. 109) que la implicación material podría ser una 'traducción' de la conjunción subordinada *si* del castellano mejor que la implicación material. Sin embargo, en el caso de los enunciados contrafácticos, la implicación estricta claramente no es adecuada. Consideremos el siguiente enunciado.

(1) Si Juan fuera el hermano de Guille, Guille tendría seis hermanos
(Suponemos que en realidad Guille tiene cinco hermanos)

Si traducimos (1) como $p \dashv q$, tendremos que en todos los mundos posibles en que Juan es el hermano de Guille, Guille tiene seis hermanos. Pero esto no parece ser cierto, puesto que puede muy bien haber mundos posibles en los que alguno de los hermanos reales de Guille no sean sus hermanos o en los cuales Guille tenga siete u ocho hermanos.

Por otro lado, dadas las circunstancias, (1) parece ser un enunciado verdadero. La intuición que quisiéramos aprehender es la de que en un enunciado contrafáctico como (1) estamos hablando de una situación

---

[6] Hay un excelente artículo de Kripke (Kripke (1972)) sobre estos problemas. Otro intento que hay que mencionar es el del filósofo americano David Lewis (cfr. Lewis (1968)). Según Lewis, no hay relaciones de identidad entre objetos en mundos diversos. En vez de ello, un objeto puede tener una o varias *contrapartidas* en otro mundo. En principio se escogen como contrapartidas aquellos objetos que son más semejantes. La idea de Lewis fue utilizada por un lingüista, George Lakoff (1970) en uno de los primeros intentos de aplicar la noción de mundo posible en la semántica lingüística. Lakoff quería explicar por qué aparecía *me* en vez del *myself*, como era de esperar, en un enunciado como el siguiente:

I dreamed that I was Brigitte Bardot and that I kissed me
(Soñé que yo era Brigitte Bardot y que me besaba).

La hipótesis de Lakoff era que *I* (yo) y *me* en la última oración se refieren ambos a contrapartidas del hablante, pero que en el mundo o mundos donde existieran no serían idénticas entre sí y que, por lo tanto, la condición de correferencia para el uso del pronombre reflexivo *myself* no se cumple.

que es todo lo semejante que permite la verdad de la oración condicional a la situación real. En otras palabras, estamos hablando de un mundo o de mundos que se diferencian del real sólo en que ellos Juan es hermano de Guille. Una serie de lógicos (v. gr.: David Lewis (1973) y Robert Stalnaker (1968)) han propuesto teorías que explican esta intuición. Lo hacen introduciendo *grados de semejanza* entre mundos posibles. Con la ayuda de este concepto podemos introducir un operador-$\Box\!\!\rightarrow$ con la siguiente interpretación.

(2) $p\text{-}\Box\!\!\rightarrow q$ es verdadero en el mundo M sii q es verdadero en aquel mundo que, estando entre los mundos en que p es verdadero, es el más semejante a M. (En algunos casos la definición ha de modificarse cambiando 'aquel mundo' por 'aquellos mundos' puesto que dos mundos pueden ser igualmente semejantes al mundo real.

7.6. LOGICA TEMPORAL Y PUNTOS DE REFERENCIA

Estudiemos los dos enunciados siguientes:

(1) Dos más dos es igual a cuatro

(2) Llovía

(1) y (2) se diferencian fundamentalmente en lo siguiente: (1) es un enunciado verdadero siempre, mientras que el valor de verdad de (2) varía según cuándo y dónde se dice. De hecho la mayoría de los enunciados en el lenguaje natural son **dependientes del contexto**[7] en una u otra manera, es decir, hemos de saber algo acerca del contexto en que se dice un enunciado para entenderlo adecuadamente. Las llamadas expresiones **deícticas** o **indexicales** son un ejemplo habitual de esto. Como sabemos, la referencia de pronombres como *yo, nosotros, tú, esto, aquello* y de adverbios como *ahora* y *aquí* viene determinada por factores como quién habla a quién y dónde. Las expresiones de la lógica de predicados, por otro lado, no presentan esa dependencia del contexto. Así, si estudiamos las reglas semánticas de la lógica de predicados, no encontramos referencia alguna a la situación en que se produce un enunciado. Un enunciado es verdadero o falso: el contexto en que aparece no tiene relevancia.

Algunos lógicos han intentado construir sistemas que se parezcan más al lenguaje natural en este respecto. Han planteado que el valor de verdad de un enunciado debería determinarse sólo relativamente a un

[7] No nos referimos aquí a la distinción entre gramáticas no contextuales y gramáticas sensibles al contexto.

conjunto de **puntos de referencia** o índices, incluyendo entre ellos, por ejemplo, el hablante, aquel a quién se dirige lo hablado, el momento del acto lingüístico, el lugar donde se produce. Así, por ejemplo, (2) podría decirse que es verdadero de, digamos, Londres a las dos del 23 de marzo de 1975.

Un rasgo del lenguaje natural, emparentado con el anterior, que los lógicos (particularmente el neozelandés Arthur Prior, en, por ejemplo, Prior (1957, 1967, 1968)) han tratado de incorporar en sus sistemas es la categoría del tiempo. Para lograrlo han construido lo que se ha dado en llamar **lógica temporal.** La lógica temporal es similar a la lógica modal, tanto en su sintaxis como en la semántica. Habitualmente se añade a la sintaxis de la lógica de enunciados o de predicados un conjunto de cuatro operadores temporales, para los que usaremos las letras *F, H, G* y *A*, y que se interpretan de acuerdo con las siguientes reglas.

(3) (*a*) $F\alpha$ es verdadero respecto a un momento del tiempo t sii α es verdadero respecto a un momento del tiempo que sigue a t

(b) $H\alpha$ es verdadero respecto a un momento del tiempo t sii α es verdadero respecto a un momento del tiempo que precede a t

(c) $G\alpha$ es verdadero respecto a un momento del tiempo t sii α es verdadero respecto a todos los momentos del tiempo que siguen a t

(d) $A\alpha$ es verdadero respecto a un momento del tiempo t sii α es verdadero respecto a todos los momentos del tiempo que preceden a t

En la semántica de la lógica temporal, los momentos del tiempo (o, si se prefiere, los estados del mundo en cada momento del tiempo) corresponden a los mundos alternativos de la lógica modal. La idea es que entendemos las expresiones con operadores temporales enteniendo qué significaría que las expresiones simples fueran verdaderas en otros momentos del tiempo. Quizá resulte útil aquí el siguiente símil. Imaginemos que un prolífico productor cinematográfico hace una enorme serie de films gigantescos, cada uno de los cuales representa una 'historia del mundo' alternativa, dispuesta de tal manera que cada película sea una secuencia de cuadros que muestran, cada uno de ellos, cómo era (es o será) el mundo en un cierto momento en cada una de esas historias alternativas. Parece conveniente restringir el término 'mundo posible' a lo que hemos llamado 'historia alternativa del mundo', y usar 'situación posible del mundo' para los sucesivos estados que los cuadros muestran. Nótese que si se ponen al lado partes cortadas de las películas, las dos dimensiones son diferentes: la dimensión vertical de cada película representa el tiempo, que está ordenado, mientras que los cuadros que caen juntos, uno al lado del otro, no presentan esa ordenación.

Dado un punto del tiempo, podemos distinguir entre los momentos que le preceden y los que le siguen. Esto hace posible tener cuatro operadores en la lógica temporal, mientras que la lógica modal, en la que no hay nada que corresponda a la distinción mencionada, sólo tiene dos.

Los operadores temporales pueden iterarse al igual que los operadores modales. Por ejemplo, podemos producir una combinación como la siguiente.

(4) *HAp* 'Ha ocurrido en algún momento del tiempo que siempre ha ocurrido antes de ese momento que *p*'.

Al igual que en la lógica modal, encontramos diferencias de alcance en la lógica temporal que tienen cierta importancia. Por ejemplo, veamos el siguiente enunciado.

(5) Todo el mundo ha sido un niño

Este enunciado tiene dos interpretaciones, aunque una de ellas es, de hecho, absurda: o bien queremos decir que para cada persona ha habido un momento en que era un niño (lo cual es verdadero), o bien intentamos decir que ha habido un momento en el que toda persona era un niño (lo cual es falso). La lógica temporal nos ofrece las siguientes posibilidades de formalizar estas interpretaciones.

(6) (a) $\forall x\, HC(x)$
(b) $H\,(\forall x\, C(x))$

La ambigüedad se interpreta aquí como una diferencia en el alcance del operador *H*. Sin embargo, para poder interpretar estas fórmulas necesitamos saber exactamente cuáles son los rangos de los cuantores. De otro modo, no sabríamos si estamos hablando de todas las personas que existen ahora, de todas las personas que han existido en algún momento del tiempo o bien de las personas que existieron en un cierto momento del tiempo en el pasado. El lector puede intentar por sí solo aclarar cuál de estas posibilidades tiene sentido en el caso de (6) (a - b).

Ambigüedades similares se pueden encontrar en el caso de las descripciones definidas, por ejemplo:

(7) El Papa siempre ha sido católico

que se puede parafrasear de dos modos, como en (8)

(8) (a) La persona que ahora es Papa ha sido siempre católica
(b) siempre ha ocurrido que la persona que era Papa ha sido católica

¿Qué relación existe entre los operadores temporales y los tiempos del lenguaje natural? A los operadores F y H se les llama a veces 'operador futuro' y 'operador pasado", respectivamente. Esta terminología puede ser confundente, puesto que sugiere que F y H corresponderían a los tiempos pasado y futuro del castellano. Si nos fijamos en el pretérito imperfecto, veremos que normalmente se usa incluyendo una referencia implícita a un momento o período de tiempo que viene dado por el contexto. Así pues, un enunciado como (2), que repetimos más abajo, resulta un tanto inapropiado si el contexto no nos posibilita la determinación del momento o período de tiempo a que se refiere.

(2) Llovía

En el marco del sistema de lógica temporal que hemos presentado aquí, no es posible una referencia temporal de este tipo. Se podría argumentar que una fórmula como Hp está más cercana a un enunciado castellano con el verbo en pretérito perfecto:

(9) Ha estado lloviendo

Sin embargo, (9) suele tener otras implicaciones, por ejemplo, que los efectos de la lluvia todavía son visibles, lo cual no puede derivarse de la fórmula de la lógica temporal. Vemos, pues, que una lógica temporal del tipo que hemos esbozado aquí es demasiado poco elaborada para captar las sutilezas de los tiempos castellanos, cosa que no significa, desde luego, que esas sutilezas no sean analizables lógicamente.

EJERCICIOS

1. ¿Cuál es el alcance de N en las expresiones siguientes?

   (*a*) $N(\forall x F(x))$
   (*b*) $\forall x(N(\exists y(F(x, y))))$

2. Traducir a la lógica proposicional modal:
   Necesariamente, llueve o no llueve

3. Traducir a la lógica modal de predicados el siguiente enunciado e intentar buscar todas las posibilidades de alterar el alcance de los operadores, incluso en el caso de posibilidades que no puedan ser interpretaciones del mismo.

   Posiblemente todos los estudiantes leen un libro

4. Dada la siguiente falacia (adaptada de Quine, 1964):

   Jorge se casó con Mari. Mari es viuda. Por lo tanto, Jorge se casó con una viuda.

   Analizar en qué se distingue del siguiente razonamiento correcto:

   Jorge ama a Mari. Mari es viuda. Por lo tanto, Jorge ama a una viuda.

8

Lógica intensional y gramática categorial

8.1. INTENSIONES Y EXTENSIONES

Hemos mostrado en los capítulos precedentes cómo el análisis lógico es paralelo al análisis lingüístico. En este capítulo vamos a intentar integrarlos en una sola teoría.

En la lógica de predicados dimos significado a las expresiones lingüísticas poniendo en relación nuestro lenguaje con un modelo en el que se asignaban extensiones a las constantes de individuo y de predicado, a saber, individuos a las constantes de individuo y conjuntos de individuos a las constantes predicado. En otras palabras, dar una semántica a un lenguaje se entendía como el indicar a qué objetos habían de referirse los términos de individuo y los términos de predicado. Haciendo esto, y en un segundo paso, podíamos formular las condiciones de verdad de los enunciados de la lógica de predicados. En base a lo anterior pudimos caracterizar la noción de consecuencia lógica en lógica de predicados y con ello fue posible captar el tipo de inferencias realizables en esta lógica. Hay, sin embargo, una gran variedad de razonamientos que no se pueden estudiar en el marco de la lógica que describimos en el capítulo 5. Ya hemos visto cómo se añadían los operadores modales, y han de venir otras ampliaciones. Una de las cosas que eran inadecuadas y demasiado simplificadas en nuestra versión de la lógica de predicados era la concepción de la semántica como un simple emparejamiento de expresiones lingüísticas y objetos del mundo. Hace ya tiempo que se ha visto que un análisis así del significado, tan simple, aunque quizá necesario y deseable como primer paso, es bastante insuficiente. Uno de

los más tempranos argumentos para mostrar que ese análisis del significado era inadecuado para caracterizar ciertos tipos importantes de razonamiento fue propuesto por los estoicos. El ejemplo es una paradoja (llamada la **paradoja de Electra**), que intenta mostrar que un análisis simplemente referencial del significado conduce a absurdos y que por lo tanto no puede ser correcto (cfr. la sección sobre el razonamiento indirecto). El escenario es el siguiente: Orestes ha vuelto a casa. Electra no le reconoce, aunque sabe que Orestes es su hermano.

(1) LA PARADOJA DE ELECTRA

(a) Premisas: Electra no sabe que el hombre que está frente a ella es Orestes

(b) Electra sabe que Orestes es su hermano

(c) El hombre que está frente a ella es idéntico a Orestes

Conclusión: Electra sabe y no sabe que el mismo hombre es su hermano

A lo largo del tiempo se han propuesto otros muchos ejemplos similares; los escolásticos medievales, Frege, Russell, Carnap y Church son algunos de los que han propuesto tales ejemplos. Hemos discutido algunos de estos casos en la sección 'Opacidad' en el capítulo de lógica modal

El método habitual de escapar de la paradoja fue indicado ya por los estocios mismos. Hay que distinguir un tercer tipo de entidad además de las expresiones lingüísticas y los objetos del mundo: los sentidos o conceptos. (Los estoicos utilizaban el término 'lecton').

Para analizar el significado de una expresión lingüística, no es suficiente relacionar la expresión con un objeto o conjunto de objetos; además tenemos que dar un sentido o concepto a la expresión. Utilizando una terminología que se ha establecido ampliamente en los últimos años, nos referiremos al sentido o concepto de una expresión por medio del término intensión; con el término extensión de una expresión indicaremos los objetos del mundo a que la expresión se refiere [1]. Introdujimos antes estos conceptos en la p. 7.

---

[1] Los conceptos de intensión y extensión se utilizaron originalmente referidos sólo a los términos universales, es decir, a términos que se aplican a varios objetos diferentes. Así, la palabra *árbol* designa un amplio conjunto de objetos, su extensión, por medio de su intensión, que se describe como el concepto generado por un acto de abstracción realizado sobre las propiedades que todos los árboles tienen en común. Cfr. Kneale y Kneale (1962). Posteriormente la distinción fue generalizada por Carnap para aplicarla también a términos singulares. Véase Carnap (1947). La distinción tiene aproximadamente el mismo alcance que la distinción fregeana entre *'Sinn'* y *'Bedeutung'* (Frege (1952))

Vamos a indicar, primero de todo, la forma de solucionar nuestra paradoja. La conclusión, contradictoria, afirma que Electra sabe y no sabe que cierta persona es su hermano. Bien, si analizamos más de cerca las premisas que llevan a esta conclusión, veremos que en (a) y en (b) hemos utilizado dos expresiones lingüísticas diferentes para designar a esa persona, en concreto *Orestes* y *el hombre frente a ella.* Además perece intuitivamente claro que, a pesar de que estas dos expresiones se refieren al mismo individuo, no tienen el mismo sentido. Expresado mediante la terminología que antes hemos introducido, diremos que tienen la misma extensión pero diferentes intensiones. Podemos sugerir ahora, además, que la proposición que Electra conoce, según (a), no es la misma proposición que la que conoce según (b). Su conocimiento en (b) atañe a la intensión de la expresión *Orestes* más que a su extensión. Debido a esto la premisa (c) es irrelevante, porque sólo afirma la identidad de la extensión. Del conocimiento de la intensión no podemos, en realidad, sacar conclusiones respecto a la extensión. Por lo tanto, la conclusión es ilegítima. Obsérvese que las dificultades que nos obligan a introducir intensiones dependen del tipo de predicados que empleemos. Si hubiéramos escogido un predicado del tipo *besar* o *matar* no habría habido paradoja, como ocurre en (2).

(2) (a) Premisas: Electra mató al hombre que estaba frente a ella
(b) El hombre que estaba frente a ella era Orestes

Conclusión: Electra mató a Orestes

Por lo tanto se puede decir que ciertos predicados son **extensionales,** mientras que otros, como **saber, darse cuenta** o **entender,** son **intensionales.** Estos dos tipos de predicado se diferencian fundamentalmente entre sí según qué aspectos del objeto designado toman en consideración.

Así pues, tanto las intensiones como las extensiones parecen ser necesarias si es que queremos entender mejor el lenguaje y el razonamiento. Como ya vimos en el capítulo 2, la distinción entre intensiones y extensiones podría, por ejemplo, utilizarse para explicar la rareza de la afirmación de que el conjunto de las mujeres que han sido Presidente de los Estados Unidos es idéntico con el conjunto de los perros que escriben programas de computadora. Los dos conjuntos son extensionalmente equivalentes, pero las dos expresiones que se usan para denotar los conjuntos tienen intensiones diferentes.

8.2. INTENSION

Intentaremos ahora estudiar cómo deberían entenderse las intensiones. ¿Son algún tipo de entidades abstractas ideales que van unidas de alguna manera a las expresiones lingüísticas? Este punto de vista se llama **realismo** conceptual, puesto que los defensores de esta postura creen que las intensiones (conceptos) tienen una existencia real independiente. Alternativamente, ¿son las intensiones un tipo de ideas mentales que tiene la gente que usa las expresiones? Habitualmente se designa este punto de vista con el término **conceptualismo.** O, finalmente, ¿son algo totalmente diferente? Los lógicos que desarrollan la lógica modal (Carnap, Kripke, Kaplan, Montague)[2] han desarrollado una interesante propuesta para el análisis de las intensiones. Han combinado la elegancia de la semántica puramente extensional con ideas tomadas de la lógica modal, todo ello con el fin de tratar las intensiones. Básicamente, su idea es la siguiente: cuando pensamos en la intensión de *mujeres Presidente de los EE.UU.*, en realidad seguimos pensando en la extensión, pero no en la extensión en nuestro mundo (que sería el conjunto vacío). Pensamos más bien en la extensión que la expresión tendría en un mundo posible en el que los U.S.A. tuvieran un Presidente hembra. La extensión de una expresión no necesita, naturalmente, ser la misma en todo mundo posible. Mi plato favorito puede ser pollo a la pequinesa en un mundo, mientras que en otro puede ser el pollo frito de Kentucky, lo que significa que el sintagma *mi plato favorito* tiene extensiones diferentes en los dos mundos. De esto se sigue que incluso si resulta que dos expresiones tienen la misma extensión en nuestro mundo, esto no implica en modo alguno que hayan de tener también la misma en otro mundo. De este modo podemos establecer diferencias entre las *mujeres Presidente de los EE.UU.* y *los perros que escriben programas de computadora.*

Todavía no nos damos por satisfechos. ¿Qué es lo que tienen en común las diferentes extensiones de una expresión en los distintos mundos posibles? ¿Qué es lo que las hace ser extensiones de, por ejemplo, *rojo* y no de *azul*? Nuestra contestación será 'la intensión'. A la vez que aclaramos esta cuestión intentaremos dar una respuesta, o por lo menos un comienzo de respuesta, a otros problemas que ha ocupado largo tiempo tanto a lógicos como a teóricos de la semántica.

¿Qué es lo que hace posible que usemos del lenguaje para hablar del mundo? ¿Cómo me es posible utilizar la palabra *ventana* para indicar un objeto determinado del mundo de tal modo que esa selección no se produzca sólo en mi caso sino en el de todos los que hablan el mismo

[2] Cfr. Carnap (1947), Kripke (1963), Kaplan (1963), Montague (1974).

lenguaje? En otras palabras, ¿con qué goma se liga el lenguaje del mundo?

La respuesta clásica a esta cuestión es la de la relación de **nombrar** o **poner membretes.** Toda expresión lingüística es en realidad un membrete, y nombra objetos o conjuntos de objetos. El nombrar parece una relación sin problema y la cuestión es sólo mostrar como todo en el lenguaje puede reducirse a una especie de nombre. (Básicamente, esto es lo que hicimos en nuestro análisis de la semántica de la lógica de predicados). A continuación vamos a proponer otro tipo de planteamiento. Se trata de tomar las intensiones como el tipo de goma que estamos buscando para ligar el lenguaje al mundo. Una intensión es algo que relaciona una expresión lingüística con su extensión. Determina la extensión de una expresión lingüística. Si sabemos cuál es la intensión de una expresión, tenemos un instrumento —o, si se prefiere, un principio— para seleccionar los objetos del mundo que constituyen la extensión de esa expresión. Utilizando la terminología que hemos dado antes, diremos que una intensión es una función: algo que, dado una situación o mundo, selecciona exactamente aquellos objetos que forman en ese mundo la extensión de una expresión dada. De este modo, haciendo intervenir la teoría de conjuntos y la lógica modal, podemos definir las intensiones como funciones de mundos posibles en extensiones.

Volviendo a una cuestión planteada antes, podemos decir, pues, que lo que las diferentes extensiones de una expresión en los distintos mundos posibles tienen en común es que todas ellas, las extensiones, son valores de una función intensional que selecciona justamente la extensión relevante en cada mundo posible.

Se puede ver que este análisis se une con facilidad a lo que dijimos a propósito del significado de los enunciados en la p. 50. Argumentábamos allí que el significado de un enunciado declarativo podía, desde cierto importante punto de vista, identificarse con las condiciones de verdad del enunciado. A su vez, las condiciones de verdad pueden entenderse como un instrumento para decidir si un enunciado es verdadero o falso, dado un cierto mundo posible; en otras palabras, las condiciones de verdad serían funciones de mundos posibles en valores de verdad. Si tomamos los valores de verdad como las extensiones de los enunciados (un supuesto un tanto extraño, quizá, pero que resulta tan válido y mucho más sencillo que el supuesto de que la extensión es un hecho o situación) [3], entonces la intensión de un enunciado es justo lo que cabría

[3] Una de las razones de la elección de Frege fue que no pudo encontrar otro objeto, aparte del valor de verdad, que permaneciera constante cuando se sustituyen términos extensionalmente equivalentes en un enunciado. Se necesitaba un objeto constante como extensión, puesto que la extensión del enunciado no debe cambiar si la extensión de los términos del enunciado no cambia.

esperar. La intensión de un enunciado, es decir, lo que habitualmente se llama una proposición, es, pues, una función de ambos posibles en valores de verdad, mientras que las intensiones de los predicados y términos de individuo son funciones de mundo posibles en conjuntos de objetos y objetos, respectivamente.

Vale la pena hacer notar que este análisis de la intensión hace del concepto algo esencialmente independiente del lenguaje. Tanto el dominio de una intensión (mundos posibles) como su rango (objetos y valores de verdad) son entidades extra-lingüísticas. De nuevo se plantea aquí el problema clásico de si una intensión ha de tomarse como el conjunto de pares ordenados de sus argumentos y valores o, quizá, como una entidad real, abstracta y atemporal que relaciona palabras con objetos y valores de verdad o, finalmente, desde el punto de vista conceptualista, como un determinado constructo mental. Sea cual sea el modo en que resolvamos este problema, hemos de encontrar un modo de relacionar las intensiones con el lenguaje. Para hacer esto, introducimos una función general de interpretación I que da, para cada expresión lingüística, la intención apropiada. Tenemos el siguiente cuadro general.

(1) $I\ (rojo) = \text{intensión}_{rojo}$

$\text{Int}_{rojo}\ (M_n) = \text{Ext}_{Mn}\ (rojo)$

en donde:

M_n = mundo posible en el índice n

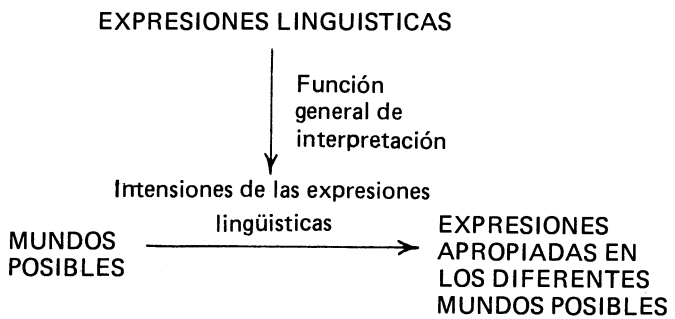
I = función general de interpretación

Int_{rojo} = la intensión de *rojo*

$\text{Ext}_{Mn}\ (rojo)$ = la extensión de *rojo* en M_n

La función general de interpretación selecciona la intensión de rojo (que es, a su vez, una función). La intensión de rojo nos da entonces, para un mundo cualquiera M_n, la extensión de rojo en ese mundo. Lo podemos representar por medio de un diagrama como sigue:

(2)



8.3. EL PRINCIPIO DE FREGE

Cuando estudiamos las conectivas lógicas encontramos que tienen en común una propiedad importante: son funciones de verdad. Esto quiere decir que dada una combinación cualquiera de valores de verdad (tomamos los valores de verdad como extensiones de los enunciados), la elección de la conectiva determina por completo el valor de verdad del enunciado compuesto formado con su ayuda. En otras palabras, hay entidades que nos dan la extensión del todo en función de la extensión de las partes. Esta idea es lo que a veces se llama el principio de Frege (aunque hay dudas sobre si Frege lo formuló alguna vez explícitamente). Podemos formular el principio de manera más general diciendo

> El significado de una expresión compleja ha de ser función del significado de sus partes

Si no hubiera otras razones, este principio se justificaría por su necesidad para explicar cómo se aprende el lenguaje humano. Dado que, según parece, es arbitraria toda limitación de la longitud o el número de enunciados nuevos que los seres humanos pueden entender, sería difícil explicar, a la vista del tamaño finito del cerebro humano, cómo es posible todo esto sin usar de algún principio del mismo tipo que el fregeando. Naturalmente, un principio así no sirve de nada si fuera necesario el conocimiento de un número infinito de funciones para calcular el significado del todo a partir del significado de las partes. Debido a esto, hemos de postular la intervención de algún tipo de recursión, es decir, el que podamos aplicar una y otra vez la misma operación (función) a su propio resultado, de la misma manera que las funciones de verdad que las conectivas designan son indefinidamente reaplicables.

Si a la idea de que el significado del todo es función del significado de las partes le añadimos, además, la idea de que la sintaxis del lenguaje está esencialmente conectada con la semántica, es decir, que la sintaxis es una especie de mapa que muestra cómo han de combinarse los significados de las partes para alcanzar el significado del todo, llegamos al tipo de análisis semántico del lenguaje que se ha intentado en la llamada **gramática de Montague.** (El nombre viene del lógico americano Richard Montague, que fue el primero en desarrollar este tipo de gramática; cfr. Montague (1974)).

A todo aquel que conozca la obra de Chomsky y los demás gramáticos generativistas le resultará evidente que el planteamiento brevemente bosquejado antes sobre las relaciones entre sintaxis y semántica es un tanto diferente del chomskyano. La posición que hemos indicado aquí se podría caracterizar como una argumentación a favor del 'isomorfismo

entre sintaxis y semántica', mientras que la posición de Chomsky se caracterizaría por su apoyo a la 'autonomía de la sintaxis'. Sin embargo, incluso aunque no haya acuerdo sobre la relación exacta que media entre sintaxis y semántica, sí lo hay, de modo general, sobre la necesidad de un principio recursivo tanto en sintaxis como en semántica.

Finalmente hemos de decir que no es claro qué significaría aplicar el principio fregeano dentro del marco de una gramática transformacional, puesto que un enunciado, según esta teoría, no tiene una única estructura sintáctica sino, por lo menos, dos (estructuras superficial y profunda o subyacente). De hecho se podría argumentar que una de las razones históricas de la introducción del concepto de estructura profunda fue el deseo de que existiera un nivel de la estructura sintáctica en el que el Principio de Frege pudiera aplicarse (Fodor y Katz (1953), y Katz y Postal (1964)). Sin embargo, en la versión más reciente de la gramática transformacional (la llamada teoría estándar ampliada) no es válido el Principio de Frege en el nivel de la estructura profunda, puesto que la interpretación semántica está parcialmente determinada por otros niveles [4].

8.4. EL PRINCIPIO FREGEANO Y LA GRAMATICA CATEGORIAL

Lo que habitualmente se llama **gramática categorial** nos da un marco muy elegante para lograr a la vez el isomorfismo entre sintaxis y semántica y mantener el principio fregeano, haciendo posible también la semántica intensional. Las gramáticas categoriales fueron desarrolladas por los lógicos polacos Lesniewski y Ajdukiewicz sobre la base de ciertas ideas formuladas por el filósofo además Edmund Husserl. En épocas más recientes han trabajado en este campo Yehoshua Bar-Hillel, Peter Geach y Max Creswell [5].

Las ideas básicas pueden enunciarse como sigue: desde un punto de vista un tanto simplista, la comunicación lingüística podría, quizá, ser descrita como algo que hace intervenir esencialmente dos cosas: (1) seleccionar una entidad del mundo; (2) decir algo acerca de esa entidad. El modo más típico de seleccionar una entidad es usar un NOMBRE y el modo más típico de decir algo acerca de la entidad que se ha seleccionado en usar un ENUNCIADO. Este es el punto de partida de una gramática categorial. Hay sólo dos categorías básicas, 'los soportes de la referencia' y 'los soportes de la verdad': las categorías sintácticas de

[4] Esto es especialmente cierto dado que algunas transformaciones parecen afectar a las condiciones de verdad, por ejemplo, la pasiva.

[5] Cfr. Ajdukiewicz (1935), Bar-Hillel (1970), Geach (1972) y Cresswell (1973).

los nombres (N) y los enunciados (S) (del inglés 'sentence' (N. del T.)). De este modo, seleccionando un nombre y realizando un cierto tipo de operación, es decir, 'diciendo algo acerca de él', producimos un enunciado. El modo formal de describir un suceso de este tipo es decir que hemos usado el nombre como un argumento de una función que produce el enunciado como valor suyo. Vamos a ver, en términos lingüísticos más concretos, qué es lo que interviene en este proceso. ¿Cuál sería un medio sencillo de producir un enunciado a partir del nombre *Juan*? Bien, se podría, por ejemplo, añadir *corre* a la derecha de Juan, lo cual produciría el nunciado *Juan corre*. (Con el fin de describir lo que sucede, introducimos el término **concatenación** para el proceso de añadir una expresión lingüística a la izquierda o la derecha de otra en un orden lineal). *Juan corre* se ha producido por concatenación a la derecha de *corre* a *Juan*. Podemos decir que *corre* es un indicador de una función que concatena por la derecha el elemento léxico *corre* con un nombre para formar un enunciado. Tales indicadores se llamarán **funtores**[6]. Así pues, *corre* es el funtor de una función que forma enunciados a partir de nombres. De hecho, todos los verbos intransitivos (VI) pueden entenderse como funtores de este tipo de funciones. De modo más general se puede decir que un funtor es un elemento del conjunto de expresiones lingüísticas que corresponden a una categoría funcional particular.

Como vemos, utilizando las dos categorías básicas de los hombres y los enunciados hemos podido crear una nueva categoría, en concreto la de las funciones que proyectan nombres en enunciados. En la gramática categoríal se designa esta categoría como S/N (la categoría que forma enunciados apartir de nombres) y corresponde más o menos a la categoría clásica de los verbos intransitivos. Es importante, sin embargo, recordar que mientras S, N y VI son categorías de expresiones lingüísticas, S/N es una categoría de funciones. Las expresiones en la categoría VI son indicadores o funtores de las funciones en S/N. Son el material léxico sobre el que operan las funciones.

No hay límite de principio en el número de categorías derivadas que se pueden formar en la gramática categorial. La regla general es:

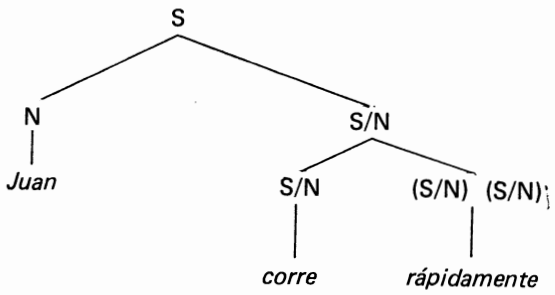
(1) Si $C_1 \ldots C_n$ son categorías, entonces $C_1/C_2 \ldots C_n$ es una categoría

Esto significa que formar categorías es un proceso recursivo. Dado que $C_1 \ldots C_n$ son metavariables de categorías, podemos siempre formar una nueva categoría que proyecta un número cualquiera de categorías en cualquier categoría. El marco es muy flexible. De hecho, permite la

[6] Debe distinguirse este uso de la palabra 'funtor' del que hacía a 'funtor' sinónimo de 'conectiva proposicional'. (N. del T.).

construcción de muchas más categorías de las que son precisas para cualquier uso en el análisis lingüístico. Debido a esto, un problema importante en el análisis categorial es seleccionar exactamente aquellas categorías que son lingüísticamente relevantes. Estudiemos algunos candidatos a categoría lingüística relevante. Por ejemplo, podemos crear la categoría (S/N)/(S/N) que corresponde a VI/VI. Esta categoría produce S/N a partir de S/N. Si no tomamos en cuenta la distinción entre S/N y VI, podemos decir que forma verbos intransitivos a partir de verbos intransitivos. ¿Cuáles serían los funtores de esta categoría? Bien, si añadimos *rápidamente* a *corre,* que es un S/N, tenemos que *corre rápidamente* es todavía un S/N, algo que, aplicado a un nombre, daría un enunciado. Así pues, *rápidamente* es un funtor de la categoría (S/N)/(S/N). En un diagrama arbóreo, *Juan corre rápidamente* se presentaría como en (2).

(2)



Otros ejemplos de categorías derivadas serían S/S, S/SS. S/S es la categoría de las funciones que producen enunciados a partir de enunciados. *Necesario, posible* y los demás operadores modales son funtores de esta categoría. Consideremos (3) y (4), más abajo.

(3) Está lloviendo

(4) Necesariamente, está lloviendo

S/S produce un enunciado a partir de dos enunciados.

Si nos fijamos en la lógica proposicional veremos que las conectivas proposicionales pueden considerarse funtores de esta categoría; *p, q* se proyectan en *p & q*. ¿Cómo se pueden describir expresiones cuantificadoras del castellano como *algunos* y *todos*? Proyectan predicados en enunciados, es decir, *corren* se convierte en un enunciado añadiéndole *algunos,* a saber, en el enunciado *algunos corren.* Aceptemos que los predicados son de la categoría S/N, la categoría que hemos asignado a

los verbos intransitivos. Esto parece razonable a la vista de que al concatenar un nombre con un predicado podemos producir un enunciado. Un cuantor debe entonces pertenecer a la categoría S/(S/N), puesto que es algo que forma enunciados a partir de predicados. (Hay, sin embargo, otros modos de construir los cuantores).

Vamos a resumir lo que llevamos dicho hasta ahora dando la sintaxis de un lenguaje categorial sencillo. Una consecuencia del hecho de que todas las categorías derivadas sean categorías de funciones es que no necesitamos un apartado de reglas de formación. Estas reglas vienen implícitas en el simbolismo categorial, es decir, si sabemos que *o* es de la categoría S/SS, no necesitamos una regla aparte que nos diga $S \rightarrow S$ *o* S. Esto queda implícito en el simbolismo categorial.

Sin embargo las reglas de formación no son totalmente implícitas. El orden secuencial de los dos S en nuestro ejemplo anterior no quedó determinado. Para determinar el orden secuencial (concatenación por la izquierda y derecha) así como la flexión y otros temas, o bien hemos de tener las llamadas *reglas de deletreo,* que deletrean todo lo que el simbolismo categorial ha dejado indeterminado o bien hemos de complicar el simbolismo categorial del mismo. J. Lambek en Lambek (1961) y John Lyons en Lyons (1968) han propuesto un paso en esta última dirección. Así Lyons utiliza $\frac{S}{N}\leftarrow$ para designar un elemento que concatena por la izquierda con un nombre para formular un enunciado y $\frac{S}{N}\rightarrow$ para designar un elemento que concatena por la derecha con un nombre para formar un enunciado.

Dado que estamos interesados en los principios de la gramática categorial sólo en cuanto facilitan nuestra comprensión de la semántica intensional, nos daremos por satisfechos con la sintaxis, relativamente simple, que hemos ido bosquejando arriba.

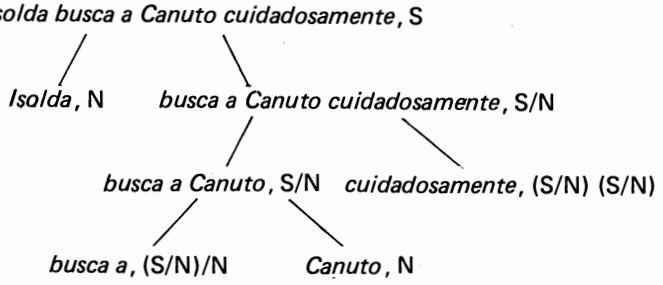
Para completar esta sencilla sintaxis, sólo necesitamos hacer una lista de las categorías básicas y derivadas que nos parecen útiles para nuestro trabajo. Finalmente, hemos de indicar las **expresiones** (funtores) **del diccionario** que pertenecen a esa categoría. Esto puede entenderse como el dar el vocabulario del lenguaje. Quizá sea necesaria aquí una breve aclaración. No toda expresión (funtor) en una categoría es una expresión del diccionario; por ejemplo, *corre* es una expresión del diccionario en S/N, pero *corre rápidamente,* aunque es un S/N, es una expresión funtorial derivada. Dado que las expresiones que producen enunciados siempre se derivan de otras categorías, no hay expresiones de diccionario para enunciados.

(5) UNA SINTAXIS CATEGORIAL SENCILLA

CATEGORIAS BASICAS		EXPRESIONES DEL DICCIONARIO
(i)	S	ninguna
(ii)	N	*Arturo, Canuto, Tristán, Isolda*
CATEGORIAS DERIVADAS		
(iii)	S/S	*necesariamente, posiblemente, no*
(iv)	S/SS	*y, o, si ... entonces, sii*
(v)	S/N	*corre*
(vi)	(S/N)/(S/N)	*rápidamente, cuidadosamente*
(vii)	S/(S/N)	*alguien, algunos, todos*
(viii)	(S/N)/N	*busca a*

El membrete de la categoría de cada funtor nos indica qué es lo que hay que combinar y cuál es la categoría de la expresión derivada resultante. *Busca* (S/N)/N se combina con un N como *Canuto* para formar el S/N *busca a Canuto,* que a su vez puede combinarse con un (S/N)/(S/N) como *cuidadosamente* para formar el nuevo S/N *busca a Canuto cuidadosamente.* Esto puede combinarse con otro N como *Isolda,* dando lugar al *S Isolda busca a Canuto cuidadosamente.* (6) muestra, de manera más sucinta, la derivación de *Isolda busca a Canuto cuidadosamente.* Esta vez utilizaremos un tipo de diagrama arbóreo, normalmente llamado **árbol de análisis,** que se usa habitualmente en la gramática de Montague

(6)



Vemos que cada paso consiste en la aplicación de una función a un argumento, dado como resultado el paso inmediatamente superior; por ejemplo, aplicamos funciones de la categoría (S/N)/N a la categoría N para lograr un S/N. Las reglas de formación implícitas en las categorías derivadas se llaman a menudo reglas de **aplicación funcional.**

Ahora debería resultar claro que la idea de construir como funciones todas las categorías excepto S y N nos da un atractivo procedimiento de

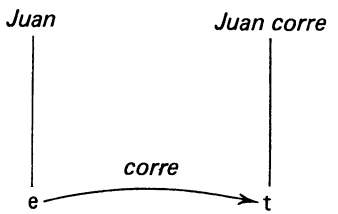
llevar a la práctica el principio fregeano. Toda expresión compuesta está formada por la aplicación paso a paso de funciones a argumentos, y por lo tanto la expresión compuesta, el resultado final, es una función de sus partes. Sin embargo, hasta este momento sólo hemos mostrado que esto es válido para la sintaxis del lenguaje que antes hemos bosquejado. El paso próximo será mostrar que la idea también vale para la semántica.

8.5. CATEGORIAS, INTENSIONES Y TIPOS

Desearíamos que nuestra semántica fuera intensional, de tal modo que pudiéramos escapar al tipo de problemas que nos hemos planteado a propósito de la paradoja de Electra. Además, nos gustaría que hubiera un isomorfismo entre sintaxis y semántica. Finalmente, deseamos que el principio de Frege valga tanto para la sintaxis como para la semántica. Veamos cómo se puede lograr todo esto. Las categorías de la sintaxis se corresponden biunívocamente a los **tipos semánticos** (podríamos usar aquí también el término 'categoría', pero esto podría crear confusiones). Los tipos semánticos básicos corresponden a las dos categorías sintácticas básicas, a saber, las de nombre y enuncialo. Las extensiones de los nunciados son los valores de verdad (tipo extensional t) y las extensiones de los nombres son entidades (tipo extensional e). La intensión de un enunciado (una proposición) es una función de mundos posibles en valores de verdad. Estas funciones se designan por ⟨s, t⟩, tomando s como un membrete del tipo intensional que corresponde a un tipo extensional cualquiera α. De manera general podemos decir que si α es un tipo extensional ⟨s, α⟩ es la intensión que corresponde a α. Las intensiones de los nombres son funciones de mundos posibles en entidades, y por lo tanto son del tipo intensional ⟨s, e⟩. Este tipo de intensiones se suele llamar **conceptos de individuo.**

Al igual que hicimos con la sintaxis, queremos construir todas las extensiones e intensiones del resto de las expresiones sobre la base de los nombres y de los enunciados. La extensión de un tipo derivado será una función de la extensión de un tipo a la extensión del otro. Por ejemplo, la extensión de *corre* será una función de las extensiones de los nombres en extensiones de enunciados. En el diagrama (1) se puede ver cómo se obtiene la extensión de *Juan corre* (1).

(1)



En vez de hacer que la extensión de *corre* sea simplemente un conjunto de elementos en e, utilizamos la función característica (cfr. cap. 1) de e en t, que selecciona ese mismo conjunto como extensión de *corre*. Al hacer la extensión de *corre* sea una función característica, podemos derivar la extensión de un enunciado por medio de una aplicación funcional de *corre* a la extensión de cualquier nombre.

(2) Ext (*corre*) (Ext (*Juan*)) = Ext (*Juan corre*)

Lo que (2) dice es: aplica la extensión de *corre* (una función) a la extensión de *Juan* (una entidad) y tendrás la extensión de *Juan corre* (un valor de verdad).

Basándonos en la regla para formar recursivamente categorías sintácticas derivadas, podemos dar ahora una regla para formar recursivamente tipos extensionales derivados.

(3) Si $C_1 \ldots C_n$ son categorías y $E_1 \ldots E_n$ son las extensiones apropiadas correspondientes a $C_1 \ldots C_n$, entonces la extensión correspondiente a la categoría $C_1/C_2 \ldots C_n$ será una función de $E_2 \ldots E_n$ en E_1

Al hacer que las categorías sintácticas básicas correspondan a tipos semánticos básicos y las categorías sintácticas derivadas a tipos semánticos derivados, todo ello mediante una regla recursiva, hemos logrado cumplir el requisito de isomorfismo entre sintaxis y semántica y, a la vez, el principio fregeano.

Sin embargo, la regla (3) sólo nos da extensiones. Como queríamos que nuestra semántica fuera intensional, hemos de ampliar lo anterior. Ya hicimos notar que las intensiones pueden verse como funciones que, para cada mundo posible, nos dan la extensión de una expresión en ese mundo. Así, $\text{Ext}_{Mi}(\alpha) = \text{Int}_{\alpha}(M_i)$ (la extensión de α en el mundo i es igual al valor de la intensión de α para ese mundo i). Como vimos, podemos indicar el tipo intensional de una expresión poniendo como prefijo una s (de sentido) a un tipo extensional. La intensión de *corre* sería, pues, $\langle s, \langle e, t\rangle\rangle$. Esto se interpretaría como la función que para cada mundo posible selecciona la función característica de *corre*.

Al igual que hicimos con las extensiones, podemos ahora dar una regla recursiva general para formar tipos intensionales derivados.

(4) Si $C_1 \ldots C_n$ son categorías y $E_1 \ldots E_n$ son las extensiones que corresponden a $C_1 \ldots C_n$, entonces la intensión s que corresponde a $C_1/C_2 \ldots C_n$ será una función de mundos posibles en funciones de $E_2 \ldots E_n$ en E_1.

Si usamos la regla para encontrar la intensión que corresponde a la categoría (S/N)/(S/N) (que tiene como funtores adverbios del tipo de

rápidamente), encontraríamos una intensión que sería una función de mundos posibles en funciones de extensiones que corresponden a S/N en otras extensiones que corresponden a S/N. Podríamos designar esta intensión del modo siguiente: ⟨s, ⟨⟨e, t⟩, ⟨e, t⟩⟩⟩.

Sin embargo, hemos de complicar un poco más las cosas para hacer justicia a alguna de las intuiciones que motivaron la introducción de la distinción entre intensión y extensión. Según el principio de Frege, la extensión de una expresión compuesta debería ser derivable de la extensión de las partes. Veamos, pues, qué queda del principio en un contexto intensional. Sean individuos la extensión de los nombres, conjuntos de individuos la extensión de los predicados y valores de verdad la extensión de los enunciados.

(5) Guille está pensando en su futura mujer

(6) Guille está besando a su futura mujer

Hay una interpretación según la cual *pensar en* puede entenderse como una relación entre individuos. Según esta interpretación (5) sería verdadero sii Guille y su futura mujer se encuentran entre los pares de individuos que constituyen la extensión de *pensar en*. Pero hay otra interpretación de (5) en la que este enunciado puede ser verdadero incluso en el caso de que no haya ningún individuo en el mundo real que sea la futura mujer de Guille (Guille podría morirse antes de ser mayor como para casarse). De todos modos, Guille podría pensar en el tipo de mujer con quien le gustaría casarse. Este segundo tipo de interpretación es completamente imposible en (6), puesto que para que sea verdadero ha de existir en el mundo real la futura mujer de Guille.

¿Cómo podríamos tratar la segunda interpretación de (5)? Según el principio fregeano, la extensión de toda expresión compleja debería ser derivable de la extensión de sus partes. Sin embargo, en la segunda interpretación, la *futura mujer de Guille* no necesita extensión en nuestro mundo. ¿Puede mantenerse todavía el principio fregeano? La solución que adoptamos es la misma que propuso Frege. Algunas expresiones lingüísticas (particularmente los sintagmas nominales definidos) no tienen, en algunos contextos, como extensión lo que sería normalmente su extensión; en vez de eso tienen como extensión lo que sería normalmente su intensión. La segunda interpretación de (5) nos da precisamente un contexto de este tipo, lo que normalmente llamamos un **contexto intensional.** El enunciado (6), por otro lado, nos ofrece un **contexto extensional** puro. Esto significa que *pensar en* puede constituir tanto un contexto extensional (en la primera interpretación, en la cual designa una relación entre individuos) como un contexto intensional (en la segunda interpretación, en la que designa una relación entre individuos y conceptos de individuo). Por lo tanto, lo que la *futura mujer de Guille* designa en la

segunda interpretación de (5) es un concepto de individuo y no un individuo.

Al igual que los nombres y los sintagmas nominales definidos, los enunciados pueden tener como extensión lo que normalmente constituye su intensión; es decir, la proposición expresada por un enunciado puede convertirse en su extensión. Esto sucede particularmente en contextos en que un enunciado queda modificado por un adverbio modal como *necesariamente* o *posiblemente.*

(7) Necesariamente está lloviendo

Como vimos, ser necesariamente verdadero significa ser verdadero en todo mundo posible, no sólo en nuestro mundo. *Necesariamente* no opera, por lo tanto, sobre la extensión del enunciado (7) (su valor de verdad en nuestro mundo) sino sobre su intensión (la proposición que expresa), que da un valor de verdad en todo mundo posible al enunciado (7). Así pues, los adverbios modales modificativos de enunciado, de modo análogo a los verbos del mismo tipo, como *pensar en,* crean contextos intensionales en los que lo que normalmente es una intensión se convierte en extensión.

Para simplificar estos y otros problemas y a la vez mantener la solución de Frege a la cuestión que estamos discutiendo, Montague (1974) sugirió la conveniencia de complicar las extensiones de la siguiente manera (lo que sigue es una versión un poco simplificada de la propuesta de Montague). En todos los contextos, los nombres y enunciados tienen como extensión conceptos de individuo y proposiciones, respectivamente. Fuera de contexto, aislados, tienen como extensiones sus extensiones normales. Dado que todas las demás categorías, debido a su carácter funcional, dependen de los enunciados y los nombres, el cambio en los nombres y enunciados significa un cambio en las extensiones de todas las categorías derivadas. Toda expresión de una categoría funcional derivada tiene ahora como extensión una función de la *intensión* del *argumento* de la categoría funcional (en el nivel más bajo, un nombre o enunciado en un contexto). Así pues, las expresiones de la categoría S/N tienen ahora como extensión una función del tipo ⟨s, e⟩ en t, en vez de una función de e en t. Por lo tanto escribimos el tipo extensional que corresponde a S/N en la forma ⟨⟨s, e⟩, t⟩ y el tipo intensional en la forma ⟨s, ⟨⟨s, e⟩, t⟩⟩.

Las intensiones se definen, por lo tanto, en el mismo modo que antes, sólo cambia la asignación de extensiones. Las extensiones de las categorías funcionales son ahora, en todos los casos, funciones de intensioes en extensiones. En cierto sentido lo que hemos hecho ha sido levantar con un gato hidráulico el sistema entero un nivel hacia arriba. En un

contexto, en vez de partir de e y t, partimos ahora de ⟨s, e⟩ y ⟨s, t⟩. Por lo demás, todo queda como antes.

Sin embargo, hemos de dar una nueva regla para la asignación de extensiones.

(8) (i) N corresponde a ⟨e⟩ y S corresponde a ⟨t⟩ cuando están aislados.

(ii) Si C_1 ... C_n son categorías y E_1 ... E_n son las extensiones que corresponden a C_1 ... C_n, entonces la extensión de C_1/C_2 ... C_n es una función de ⟨s, E_2⟩ ... ⟨s, E_n⟩ en E_1, tomando s como la intensión correspondiente a una extensión cualquiera E.

Esta regla, al igual que la dada en (3), nos dará la extensión de una categoría cualquiera que sea su complejidad. La diferencia es que ahora nos es posible tomar como extensión lo que antes era intensión. La intensión de la categoría S/N no es ya del tipo ⟨s, ⟨e, t⟩⟩ sino del tipo ⟨s, ⟨⟨s, e⟩, t⟩⟩. No necesitamos, sin embargo, una nueva regla para definir las intensiones. Dadas las nuevas extensiones, la antigua regla continúa haciendo ese trabajo.

¿Cómo será la nueva asignación de extensiones? Vamos a estudiar la derivación de una extensión para (9).

(9) Juan corre rápidamente

Vamos a usar tanto la notación con paréntesis en ángulo como una representación en diagrama. Comenzamos por caracterizar las extensiones e intensiones relevantes de las tres palabras del enunciado: *Juan, corre* y *rápidamente* (s = intensiones, W = mundos posibles, e = entidades, t = valores de verdad; la flecha significa 'función de ... en').

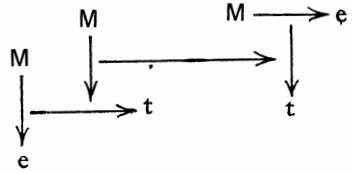
(10) *Juan*

extensión:	⟨e⟩	M → e
intensión:	⟨s, e⟩	

(11) *corre*

intensión:	⟨⟨s, e⟩, t⟩	M → e, t
intensión:	⟨s, ⟨⟨s, e⟩, t⟩⟩	M → M → e, t

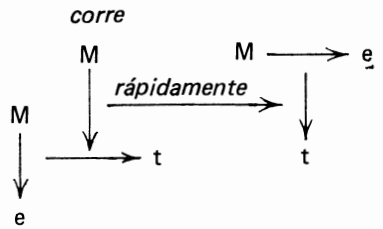
(12) *rápidamente* extensión: $\langle\langle s, \langle\langle s, e\rangle, t\rangle\rangle, \langle\langle s, e\rangle, t\rangle\rangle$



Si se tiene en cuenta que la categoría sintáctica de *rápidamente* es (S/N)/(S/N), se entiende un poco mejor el análisis de su tipo.

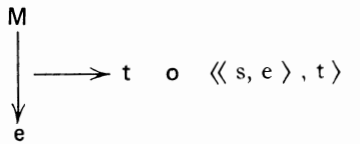
Veamos ahora cómo se combinan las interpretaciones de las expresiones simples para dar la interpretación de las expresiones complejas. En primer lugar, la intensión de *rápidamente,* $\langle s, \langle\langle s, \langle\langle s, e\rangle, t\rangle\rangle, \langle\langle s, e\rangle, t\rangle\rangle\rangle$ nos da su extensión en el mundo real $\langle\langle s, \langle\langle s, e\rangle, t\rangle\rangle, \langle\langle s, e\rangle, t\rangle\rangle$, que es la función que hemos pintado en (12). Esta función se aplica a la intensión de corre según (13). Recuérdese que los argumentos de los tipos derivados son siempre funciones. Esto nos da la extensión de *corre rápidamente,* que, al igual que la extensión de *corre,* es del tipo $\langle\langle s, e\rangle\ t\rangle$. Cfr. (13).

(13)



Ahora tenemos la extensión en el mundo real de *corre rápidamente*:

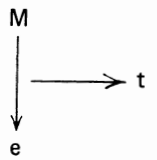
(14)



Aplicamos la extensión de *corre rápidamente* a la intensión de *Juan,* lo cual nos da la extensión de *Juan corre rápidamente* (15), del tipo t; es decir, un valor de verdad

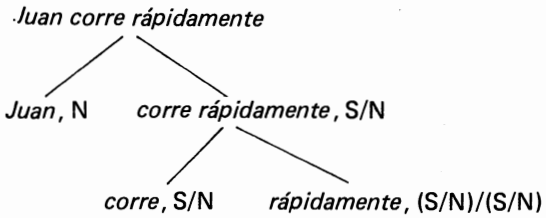
(15)

Juan corre rápidamente

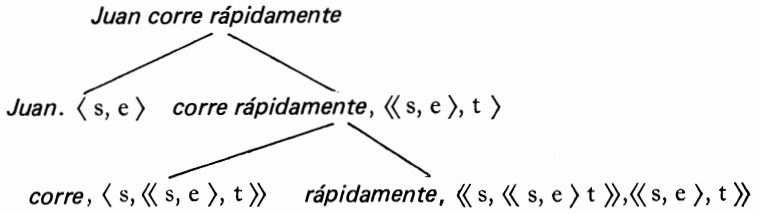


Vamos a comparar ahora la derivación sintáctica de (9) con su derivación semántica en (16) para poner de manifiesto el isomorfismo entre sintaxis y semántica.

(16) (a) Sintaxis



(b) Semántica



Se ve claramente el paralelismo entre las estructuras sintáctica y semántica.

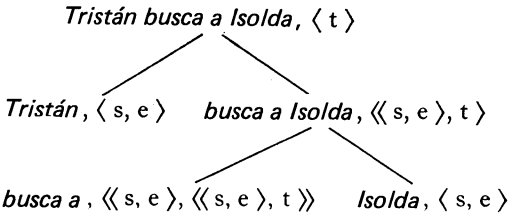
Cabría preguntarse si todas estas complicaciones son realmente necesarias. ¿No sería suficiente, después de todo, una semántica puramente extensional? Como hemos visto hay casos en que esto sería difícil. Uno de esos casos es el que apareció al comienzo de la discusión, la paradoja de Electra. Electra sabe algo acerca del concepto de individuo de Orestes, que es de tipo ⟨s, e⟩, pero no acerca de su extensión, que es del tipo ⟨e⟩. Por lo tanto no sería suficiente interpretar *saber de* sólo como un conjunto de pares ordenados de entidades con una función característica que proyecta esos pares en valores de verdad. Habría, más bien, que interpretarlo como un conjunto de pares ordenados cada uno de los cuales consiste en una entidad y un concepto individual, es decir, un par que consiste en una extensión y una intensión.

Estudiemos dos ejemplos más que ponen de manifiesto la diferencia entre un tratamiento puramente extensional y otro que, como el presente, permita la aparición de intensiones como extensiones.

(17) Tristán busca a Isolda

En (17) Isolda no necesita existir para que Tristán la busque. *Buscar* no puede tratarse, por lo tanto, como una relación entre individuos de un mundo. Es una relación intensional entre individuos y conceptos de individuo. Tristán está buscando, por medio del concepto de individuo *Isolda,* un mundo en el que *Isolda* tiene extensión. El árbol de análisis semántico de (17) es (18).

(18)



la extensión de *busca a,* del tipo ⟨⟨s, e⟩, ⟨⟨s, e⟩, t⟩⟩, se aplica a la intensión de Isolda, del tipo ⟨s, e⟩, dando la extensión de *busca a Isolda,* del tipo ⟨⟨s, e⟩, t⟩. La extensión de *busca a Isolda* se aplica entonces a Tristán ⟨s, e⟩, dando la extensión de *Tristán busca a Isolda,* del tipo ⟨t⟩.

Usando el tipo de semántica que hemos introducido para tratar los contextos intensionales, el enunciado (19) tendría que tratarse como el (17).

(19) Tristán besa a Isolda

Esto sería erróneo, puesto que *besar* es una relación extensional entre dos individuos existentes, cosa que no tiene por qué ocurrir en el caso de *buscar a.* Para lograr mantener la diferencia entre predicados extensionales e intensionales, se introduce habitualmente una serie de reglas que permiten la reducción de los predicados extensionales a funciones características, que son puramente extensionales. Así *besa,* al contrario que *busca a,* puede reducirse del tipo ⟨⟨s, e⟩, t⟩ al tipo ⟨e, t⟩. Tales reglas son ejemplos de lo que se suelen llamar **postulados de significación.** Un postulado de significación es una regla o afirmación que regula de cierta manera la interpretación de los términos, muy frecuentemente postulando una equivalencia o una relación de consecuencia entre ciertas expresiones del lenguaje.

Intentemos ahora resumir alguna de las cosas que hemos dicho sobre categorías y tipos extensionales e intensionales. Lo haremos ampliando, por medio de la información semántica, una parte de la gramática categorial que hemos dado más arriba. (20) nos ofrece un fragmento de una gramática semántica, en donde queda claramente indicada la correspondencia entre categorías sintácticas y tipos semánticos.

(20) UNA GRAMÁTICA INTENSIONAL MUY SENCILLA

CATEGORÍAS BÁSICAS	TIPOS INTENSIONALES BÁSICOS	TIPOS EXTENSIONALES BÁSICOS	EJEMPLOS
S	⟨s, t⟩	⟨t⟩	
N	⟨s, e⟩	⟨e⟩	*Juan, Guille, Tristán, Isolda*

CATEGORÍAS DERIVADAS	TIPOS INTENSIONALES DERIVADOS	TIPOS EXTE DERI	
S/S	⟨s, ⟨⟨s, t⟩, t⟩⟩	⟨⟨s, t⟩, t⟩	*necesariamente, posiblemente corre*
S/N	⟨s, ⟨⟨s, e⟩, t⟩⟩	⟨⟨s, e⟩, t⟩	
(S/N)/(S/N)	⟨s, ⟨⟨s, ⟨⟨s, e⟩, t⟩⟩, ⟨⟨s, e⟩, t⟩⟩⟩	⟨⟨s, ⟨⟨s, e⟩, t⟩⟩, ⟨⟨s, e⟩, t⟩⟩	*rápidamente, cuidadosamente*
S/(S/N)	⟨s, ⟨⟨s, ⟨⟨s, e⟩, t⟩⟩, t⟩⟩	⟨⟨s, ⟨⟨s, e⟩, t⟩⟩, t⟩	*alguien, algunos, todos*
(S/N)/N	⟨s, ⟨⟨s, e⟩, ⟨⟨s, e⟩, t⟩⟩⟩	⟨⟨s, e⟩, ⟨⟨s, e⟩, t⟩⟩	*busca a, besa*

En la gramática, las extensiones son los valores extensionales de las intensiones que hemos dado. Se obtienen quitando la primera s de cada intensión. Podemos también dar extensiones 'puras' y logramos una semántica que sería muy semejante a la que dimos más arriba para la lógica de predicados. Tal semántica sería más simple pero no podría tratar el tipo de ejemplo que motivó la introducción de las intensiones. (21) nos da una versión 'puramente' extensional de (20).

(21)

Categoría	*Tipo*	*Designación normal*
S	⟨t⟩	enunciado
N	⟨e⟩	nombre
S/S	⟨t, t⟩	adverbio monádico de enunciados
S/N	⟨e, t⟩	predicado monádico
(S/N)/(S/N)	⟨⟨e, t⟩, ⟨e, t⟩⟩	adverbio
S/(S/N)	⟨⟨e, t⟩, t⟩	cuantor
(S/N)/N	⟨e, ⟨e, t⟩⟩	verbo transitivo

Salvo por lo que toca a la categoría (S/N)/N (verbos transitivos), esta tabla corresponde más o menos a los tipos semánticos que utilizamos en

nuestra semántica de la lógica de predicados. El precio de la mayor generalidad conseguida al introducir las intensiones es, por lo tanto, un aumento considerable de la complejidad. La diferencia respecto al tratamiento de los verbos transitivos consiste en que mientras la lógica de predicados ve los verbos transitivos, es decir, los predicados diádicos, como expresiones que se combinan con dos términos para formar un enunciado (en notación categorial S/NN), nosotros los hemos tratado como functores que, junto con un nombre, forman un predicado monádico. Un enunciado transitivo se construye, entonces, en dos pasos: primero tenemos *busca a Isolda* a partir de *busca a* e *Isolda* y sólo entonces formamos *Tristán busca a Isolda.* Esto se debe a la construcción paso a paso del significado y la sintaxis por medio de la aplicación funcional.

Hasta el momento no hemos dado condiciones de verdad. Sin embargo, esto no entraña ninguna dificultad. Podemos proceder del modo siguiente: *Juan corre* es verdadero sii la extensión seleccionada en nuestro mundo por el concepto individual *Juan* es un miembro de la extensión seleccionada por la intensión de *corre* para ese mundo. La verdad se define siempre, por lo tanto, de modo relativo a un mundo. La mayor parte de las veces nuestro mundo, el mundo real, será el mundo relevante. Dado que este capítulo no ha pretendido ser más que un bosquejo informal de alguna de las ideas de la semántica intensional y de la gramática categorial, no daremos aquí una semántica formal con condiciones de verdad [7].

Finalmente, hemos de decir que nuestro tratamiento se diferencia en algunos puntos del que es habitual en la gramática de Montague. Uno de estos puntos es el análisis de los sintagmas nominales. Otro es el modo en que asignamos interpretaciones semánticas a los enunciados. En vez de formular directamente una semántica para los enunciados en el lenguaje natural, habitualmente se utiliza un acercamiento indirecto en tres pasos. Este acercamiento viene pedido por la ambigüedad y vaguedad del lenguaje natural junto con la impresionante complejidad a que rápidamente conduce una asignación directa de las interpretaciones semánticas. El planteamiento indirecto es como sigue: En primer lugar el lenguaje natural se ordena en lo que se llama un lenguaje desambiguado (cfr. p. 173). En este lenguaje todo enunciado es unívoco, no ambiguo (aunque no necesariamente menos vago). Después se traduce el lenguaje desambiguado en expresiones de la lógica intencional y sólo en este estadio se da finalmente una semántica.

La razón de este procedimiento es que en la lógica intensional podemos crear un modelo de lenguaje natural donde, por así decir, tenemos

---

[7] Los lectores interesados en el tema pueden manejar las obras de Montague, Thomason y Partee. Cfr. la bibliografía.

todo bajo control. Después, lentamente, podemos introducir en el modelo fragmentos cada vez más amplios de la complejidad de hecho del lenguaje natural. Haciendo las cosas así, las complejidades del lenguaje natural son tomadas en cuenta más por las reglas de traducción que por las reglas de interpretación semánticas, que pueden seguir siendo relativamente directas.

Este procedimiento ha sido provechoso por cuanto ha hecho posible mostrar, en un modo relativamente simple, que las llamadas estructuras profundas de la gramática transformacional pueden tratarse como un lenguaje desambiguado que puede traducirse a la lógica intensional y ser provisto de una semántica del tipo de la aquí estudiada. Cfr. Cooper y Parsons (1976).

Así pues, se ha abierto un camino hacia la convergencia de dos de las más interesantes teorías actuales: la gramática de Montague y la gramática transformacional.

EJERCICIOS

1. Buscar dos verbos intensionales y dos verbos extensionales distintos a los dados en el texto.

2. Dar un árbol de análisis de los siguientes enunciados usando la gramática categorial.
   (*a*) Guille corre y Mari canta
   (*b*) Guille duerme de noche
   (*c*) Guille besó a Mari apasionadamente

3. Dar un análisis semántico, mediante árboles, de los siguientes enunciados utilizando para ello la semántica intensional. Indíquese si el verbo permite la reducción a puras extensiones.
   (*a*) Guille se preocupa de Mari
   (*b*) Guille come un pez
   (*c*) Guille come un pez rápidamente
   (trátese *se preocupa de* y *un pez* como términos simples)

9

Otras extensiones

9.1. LOGICAS DE PREDICADOS DE SEGUNDO ORDEN Y OPERADORES DE PREDICADO

Estudiemos el siguiente enunciado.

(1) Juan tiene una cualidad inusual

Un modo de formalizar enunciados del tipo de (1) viene dado por la extensión de la lógica de predicados llamada **lógica de predicados de segundo orden** (la lógica de predicados normal es de **primer orden**). En lógica de segundo orden es posible que un cuantor ligue no sólo variables de individuo sino también variables de predicados. Por lo tanto, un predicado puede ser argumento de otro predicado. La siguiente fórmula, que formaliza a (1), está permitida en este tipo de lógica

(2) $\exists\Phi\,(\Phi(a)\ \&\ F(\Phi))$

donde $=$ 'Juan' y $=$ 'inusual'

La lógica de segundo orden ha sido estudiada menos completamente que la de primer orden. Muchos manuales no la tratan en absoluto. La mencionamos aquí porque se ha sugerido a veces que es útil para describir la semántica de varias categorías del lenguaje natural. Por ejemplo, el lógico Hans Reichenbach propuso que los adverbios como *lentamente* en *Juan conduce lentamente* deberían analizarse como predicados de segundo orden (Reichenbach (1966)). Otra propuesta, que no implica apartarse tan radicalmente de la lógica de predicados normal, es la de tratar

los adverbios como operadores que forman predicados a partir de predicados. Si *D* es un predicado con el significado 'conducir', puede haber un operador *S* con cuya ayuda podemos formar un nuevo predicado, *S(D)* 'conducir lentamente'.

En la lógica de segundo orden se puede también permitir que los enunciados hagan de argumentos de los predicados. Esto significa que pueden predicar propiedades de las proposiciones, lo que podría ofrecer una posibilidad de formalizar, por ejemplo, enunciados que contengan oraciones con *que*. Por ejemplo, un enunciado como

(3) Es increíble que venga Juan

podría entenderse como la afirmación de que la proposición 'que Juan viene' tiene la propiedad de ser increíble.

9.2. PRESUPOSICION Y DESCRIPCIONES DEFINIDAS

Normalmente, en lógica, se supone que todos los enunciados son verdaderos o falsos. En éste un supuesto práctico al construir sistemas puramente lógicos, aunque es discutible si tal supuesto tiene sentido al intentar un análisis adecuado del lenguaje natural. Veamos cómo se plantea el problema. Según la semántica de la lógica proposicional que antes hemos dado, $\sim p$ es verdadero sii p no es verdadero; en otras palabras, la negación de un enunciado es verdadero siempre que el enunciado sea falso. Pero veamos la broma clásica:

(1) ¿Has dejado ya de pegar a tu mujer?

y las respuestas posibles

(2) Sí, ya he dejado de pegar a mi mujer
(3) No, no he dejado de pegar a mi mujer

(3) parece ser la negación de (2). Y si dos no es verdadero, (3) debería serlo. Pero un marido que no ha pegado nunca a su mujer no puede contestar ni (2) ni (3), puesto que ambas contestaciones implican que él ha pegado alguna vez a su señora. Podríamos entonces pretender que, en este caso, (2) y (3) no son verdaderos ni falsos, que no tienen ningún valor de verdad. De esto se sigue que existe una condición que ha de cumplirse para que (2) y (3) tengan valor de verdad, en concreto, que el hablante haya pegado alguna vez a su mujer. Este tipo de condición se llama **presuposición (lógica)** [1] Históricamente, la noción de presupo-

[1] Análisis de los problemas relacionados con el concepto de presuposición se encontrarán en Fillmore y Langendoen (eds) (1971) (sobre todo los artículos de Garner y Keenan), Petöfi y Franck (eds) (1973) y D. Cooper (1974).

sición tiene su origen en el matemático alemán Gottlob Frege. En la lógica clásica las presuposiciones no juegan ningún papel, puesto que se supone que todo enunciado tiene valor de verdad, pero no es en absoluto imposible construir lógicas que permiten enunciados sin valor de verdad —o que permiten más de dos valores de verdad— en las cuales la presuposición juega un papel lógico importante.

Dijimos antes (sección 3.4) que las proposiciones pueden entenderse como funciones del conjunto de los mundos posibles en el conjunto formado por los valores de verdad 'verdadero' y 'falso'. En una lógica con presuposiciones, estas funciones pueden verse como definidas (es decir, tomando valores) sólo para un conjunto restringido de mundos, en concreto aquellos mundos en que se satisfacen las presuposiciones de la proposición. Este último conjunto de mundos sería, entonces, el dominio de la proposición.

Existe también la posibilidad de introducir un tercer valor de verdad, 'cero', junto con los de 'verdadero' y 'falso'. Un enunciado cuyas presuposiciones no se cumplen tendría entonces el valor de verdad 'cero'. Según este análisis de las presuposiciones, una presuposición es una condición de que un enunciado tenga un valor de verdad. Si interpretamos la negación en el mismo modo que en la lógica sin presuposiciones —es decir, de tal modo que la negación de un enunciado verdadero sea siempre falso, y vivecersa— tendremos que un enunciado y su negación tienen siempre las mismas presuposiciones. Esto ha sido propuesto, incluso, como una prueba para las presuposiciones: si tanto un enunciado p como su negación $\sim p$ sólo pueden ser verdaderos cuando q es verdadero, entonces p presupone a q.

Podemos distinguir tres casos importantes de presunción en el lenguaje natural: **existencial, factiva** y **categorial** (hay también otros tipos). Como ejemplos de presuposiciones existenciales podemos dar los siguientes:

El coche de Fafnir es rojo	PRESUPONE	Fafnir tiene coche
La Universidad de Oxford es famosa	PRESUPONE	Hay una universidad en Oxford

Los enunciados que atribuyen una propiedad a un objeto individual presuponen, en general, la existencia del objeto en cuestión. Las presuposisiones existenciales son, por lo tanto, muy frecuentes en el discurso en lenguaje natural.

Valgan los siguientes enunciados como ejemplo de presuposiciones factivas:

Ethelred lamenta que Canuto sea listo	PRESUPONE	Canuto es listo

Es raro que la tierra sea redonda PRESUPONE La tierra es redonda

Las presuposiciones factivas aparecen en enunciados que contienen predicados que expresan propiedades o relaciones en las que intervienen hechos. Predicados de este tipo son *lamentar, ser extraño que, ser raro que.*

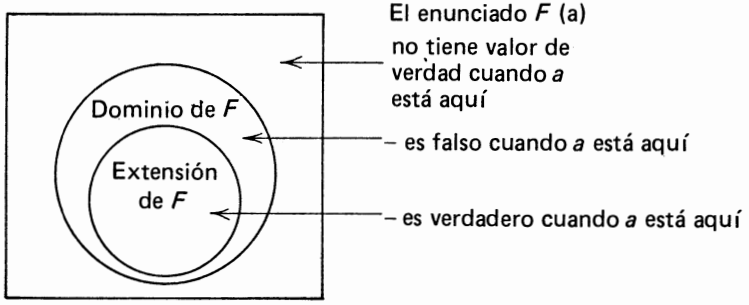
Como ejemplo del tercer tipo de presuposiciones, las presuposiciones categoriales o de tipo, podemos dar los siguientes enunciados:

(4) Fafnir es listo

(5) La Torre Eiffel es lista

¿(5) es verdadero o falso? Podríamos afirmar que ninguna de las dos cosas: puede decirse que el predicado *ser listo* presupone que su sujeto es algo dotado de entendimiento. Podemos describir estos casos en nuestra lógica introduciendo el concepto de dominio también para predicados (antes hemos hablado de los dominios de las funciones y proposiciones). Intuitivamente, el dominio de un predicado es el conjunto de individuos de los cuales tiene sentido afirmar el predicado. El dominio de *ser listo* será pues algo así como el conjunto de los objetos que piensan (o que tienen entendimiento). (Es importante distinguir esto de la EXTENSION de *ser listo,* que, como sabemos por la lógica de predicados, es el conjunto de objetos que son, de hecho, listos). El principio sería, entonces, que un enunciado $R(a)$ presupone que a pertenece al dominio de F. Según el tipo de análisis en el que si no se cumple la presuposición de un enunciado, el enunciado no tiene valor de verdad, tendremos los tres casos que aparecen en (6).

(6)



La condición de que el sujeto del predicado exista puede entenderse como una restricción sobre el dominio del predicado. Nótese que hay ciertos predicados que no presuponen existencia (por lo menos no en sentido físico), por ejemplo, (7).

(7) Superman es popular

De todos modos, estos problemas son demasiado intrincados para tratarlos aquí de modo satisfactorio.

En la p. 77 dimos reglas para la determinación de las condiciones de verdad de los enunciados atómicos en una lógica de predicados normal (sin presuposiciones). Las reglas que tenemos en una lógica que admita enunciados sin valor de verdad no son muy diferentes: lo más importante es que hay tres casos en vez de dos. Para el caso de enunciados con predicados monádicos podemos dar estas reglas como sigue:

(8) Un enunciado de la forma $P(t)$, es una interpretación cualquiera

ES VERDADERO sii el objeto asignado al término individual está en la extensión del predicado

ES FALSO sii el objeto asignado al término individual está en el dominio pero no en la extensión del predicado

NO TIENE VALOR DE VERDAD en otro caso, es decir, sii el objeto asignado al término individual no está en el dominio del predicado

El concepto de **descripción definida** está muy relacionado con el problema de la presuposición. Una descripción definida es una expresión que selecciona cierto objeto individual describiéndole como 'objeto que tiene tales y tales propiedades'. En el lenguaje de la lógica de predicados ordinaria no hay descripciones definidas, pero pueden introducirse en él ampliando el lenguaje con el **operador iota** (ι, la letra griega iota). Por medio de este operador podemos escribir, por ejemplo, 'el x tal que tiene la propiedad F' como $\iota x(F(x))$. Esta expresión se usa como una constante de individuo (en el mismo modo que a, b, c), y puede ser, también, un argumento para los predicados, como en $G(\iota x(F(x)))$, que se lee 'el x que tiene la propiedad F tiene la propiedad G' o, de manera más corta, 'el F es G'. El operador iota se parece a un cuantor, pero deben notarse las diferencias: Un cuantor se pone delante de un enunciado abierto y convierte a éste en un enunciado, mientras que el operador iota convierte a un enunciado abierto en un término (una constante de individuo). (Más abajo estudiaremos un tercer tipo de operador, el operador de abstracción).

Para usar una expresión del tipo de $\iota x(F(x))$ han de cumplirse ciertas condiciones: ha de existir un x que tenga la propiedad F y no puede haber más de un x que la tenga. ¿De qué naturaleza son estas condiciones? ¿Son condiciones de verdad o no? Una alternativa —defendida por el filósofo británico P. F. Strawson— es decir, que cuando esas condi-

ciones no se cumplen, el enunciado (o afirmación) no es verdadero ni falso: esta postura coincidiría con el tratamiento de las presuposiciones, basado en la idea de los valores de verdad, que antes hemos dado. Sin embargo, hay otro punto de vista, formulado por Bertrand Rusell, que se inclina decididamente por una lógica estrictamente bivalente (en la que todo enunciado es verdadero o falso). En esta teoría, un enunciado que contiene una descripción definida debe entenderse como una abreviatura de un enunciado más complejo en el que no aparece ninguna descripción. Según Russell, la expresión $G(\iota x(F(x)))$ es equivalente a la fórmula

(9) $$\exists x\,(F(x)\ \&\ G(x)\ \&\ \sim \exists y\,(F(y)\ \&\ x \neq y))$$

o, en otras palabras:

(10) Hay un y sólo un x que es F y ese x es también G

El ejemplo clásico de Russell, *El Rey de Francia es calvo* se interpreta, por lo tanto, como

(11) Hay un y sólo un Rey de Francia y él es calvo

Vemos que (11) es falso si no hay Rey de Francia o si hay más de un Rey de Francia. Un problema aparte es el de si (11) reproduce adecuadamente el significado de *El Rey de Francia es calvo.*

9.3. ANALISIS PRAGMATICO DE LAS PRESUPOSICIONES

Una alternativa al uso de valores de verdad en la caracterización de las presuposiciones y en el análisis de lo que ocurra cuando una presuposición no se cumple viene dada por el llamado análisis **pragmático** de las presuposiciones. Según este planteamiento se debería introducir, al lado de la verdad, un concepto de **éxito (felicity)** en el análisis del significado lingüístico. Del mismo modo que la verdad relaciona enunciados con situaciones respecto de las cuales los enunciados son verdaderos, el **éxito** relaciona enunciados con contextos (o situaciones) en los que son **apropiados, exitosos** (o felices). Las condiciones de éxito de un enunciado son aquellas condiciones que deben cumplirse para que un enunciado sea exitoso en ese contexto. Hay dos maneras de definir la relación entre éxito y verdad. O bien se entiende la verdad como un tipo de éxito, o bien, interpretando este concepto de modo más estrecho, se entienden verdad y éxito como dos dimensiones independientes. Si verdad y éxito se ven como dos dimensiones distintas entonces parace haber ciertos factores en una situación comunicativa que parecerían afectar al éxito, pero que no afectan a la verdad, y viceversa.

Por ejemplo, si en un país como Francia existe una distinción entre un pronombre personal de segunda persona de cortesía (*vous*) y un pronombre personal de segunda persona no de cortesía (*tu*), y uno dice, después de haber invitado a una persona mayor que no conoce, *tu es invité* 'estás invitado', este enunciado es inapropiado pero verdadero. Del mismo modo puede haber otros casos en que un enunciado sea inapropiado y falso, o, inversamente, exitoso y verdadero o falso [2].

Algunas de las más importantes condiciones de éxito están dadas por normas comunicativas del tipo que hemos mencionado arriba en relación con nuestra discusión de la disyunción [3]. Son importantes, entre estas normas, la **norma de competencia** y la **norma de relevancia o pertinencia.** La norma de competencia dispone que un hablante debe ser sincero y tener alguna base para decir lo que dice. En el caso de las afirmaciones, esta norma significa que el hablante cree lo que está afirmando y que debe tener alguna prueba a la que remitirse. Del principio se siguen consecuencias similares para otros tipos de locución.

La norma de relevancia o pertinencia dice que toda producción lingüística ha de ser pertinente para algún propósito más o menos inmediato. Normalmente, el propósito de los enunciados es transmitir información nueva.

(1) El Sr. Lucas está hoy sereno

Si estudiamos (1) veremos que estamos tan acostumbrados a que una afirmación transmita información nueva que asumimos implícitamente un fondo de conocimientos contra el cual se proyecta la nueva información. Si el Sr. Lucas está sereno normalmente, sentimos que la información es irrelevante, es decir, inapropiada, aunque sea completamente verdadera, y de alguna manera nos molesta.

Volvamos ahora al análisis de las descripciones definidas. Un análisis pragmático de las descripciones definidas tendría, más o menos, la siguiente forma. En primer lugar, intentaríamos determinar cuál es normalmente el propósito al usar una descripción definida. En la mayoría de los casos, las descripciones se usan para REFERIRSE a algo; uno se refiere a un objeto para afirmar algo de ese objeto. En base a otros hechos de la comunicación humana, hechos que tienen que ver con la capacidad humana para recibir y transmitir información, sabemos que una nueva información se capta con más efectividad si la nueva información puede anclarse en una información anterior. La parte del enunciado que se usa para referirse a algo nos da ese anclaje o transfondo sobre el cual se puede afirmar la nueva información. Por lo tanto, es importante que

---

[2] Para un análisis del concepto de éxito, cfr. Austin (1962).
[3] Cfr. Grice (1975).

aquello a lo que el enunciado se refiere sea un dato común al hablante y al oyente, es decir, que ambos —o por lo menos el hablante— sea capaz de seleccionar o identificar el objeto de referencia. Esto es precisamente una de las cosas que queríamos señalar al decir que la norma de competencia requiere que el hablante tenga algún tipo de fundamento o prueba de lo que afirma. Así pues, cuando un hablante, al afirmar algo, emplea una descripción definida para señalar de qué está hablando, debe ser capaz de identificar aquello de lo que habla. Para tener éxito en tal identificación es necesario normalmente (dependiendo del tipo de predicado; cfr. más arriba) que exista el objeto o fenómeno al que se está refiriendo. En otras palabras, todo objeto al que se hace referencia ha de existir.

El análisis pragmático intenta analizar otros tipos de presuposición, como la factiva o categorial, a lo largo de estas mismas líneas. Sobre la base de tales análisis se afirma luego que las presuposiciones están entre los factores que determinan el éxito de un enunciado y que no son lo determinante para que un enunciado tenga un valor de verdad o no. Así

(2) El coche de Fafnir es rojo

se tratará como inapropiado y falso en el caso de que Fafnir no tenga coche. Falso, puesto que nuestro mundo no es tal que (2) pueda ser verdadero en él. Por lo tanto, 'no verdadero' sigue considerándose sinónimo de 'falso'. El análisis pragmático se asemeja en este punto al de Russell, por cuanto en ambos casos se mantiene una lógica bivalente, pero se diferencia del de éste en cuanto en nuestro primer análisis se explicaba la dificultad por medio de un tercer valor de verdad o, alternativamente, por una **falla del valor de verdad** (truth-value gap) y ahora se hace por medio de condiciones de éxito basadas en un análisis más amplio de la comunicación lingüística.

Hay que añadir, finalmente, que no está resuelto en absoluto el problema de cuál de los dos tipos de análisis de las presuposiciones —el basado en valores de verdad o el basado en condiciones de éxito— es el mejor. Por otro lado, hay muchos casos en que no está nada claro si una cierta condición debería entenderse como una condición de verdad o como una condición de éxito en sentido estrecho. Incluso no está claro si ambas alternativas son excluyentes. Al presentar ambas alternativas lo que queríamos era indicar alguna de las opciones que se ofrecen el análisis formal del significado lingüístico.

9.4. EL OPERADOR DE ABSTRACCION U OPERADOR LAMDA

En el capítulo de teoría de conjuntos mencionamos la notación usada para definir conjuntos por descripción, $\{x \mid \ldots\}$, que se lee 'el conjunto de los x tales que...'.

Hay un modo alternativo de escribir esas fórmulas, usando el llamado **operador de abstracción** u **operador lamda.** Por ejemplo, para denotar 'el conjunto de los x tal que $F(x)$', podemos escribir $(\lambda x)(F(x))$ (λ es la letra griega lamda [4]). Si queremos, podemos entender este operador como una alternativa al operador iota, pero sin sus presuposiciones (de existencia y unicidad) y con referencia en un conjunto y no en un individuo, como era el caso del operador iota. Si el operador iota corresponde al artículo definido en singular, el operador lamda corresponde al artículo definido en plural. (Si esto se toma como teoría lingüística, resultará totalmente contraintuitivo, puesto que supone que el artículo definido en singular y en plural son dos cosas esencialmente distintas).

Quizá hay otra manera de interpretar el operador lamda. Podemos pensar en la expresión lamda como algo que denota una propiedad, por ejemplo, en el caso que hemos mencionado arriba, 'la propiedad de ser F'. Así las cosas, la expresión lamda puede usarse, o bien como un término de la lógica de segundo orden que se refiere a una propiedad, o bien, dentro de la lógica de primer orden, como un predicado derivado que puede usarse para formar un enunciado uniéndole un término individual. Podemos escribir, por ejemplo,

(1) $$((\lambda x)(F(x)))(a)$$

para indicar 'a tiene la propiedad de ser F'. Desde luego, esto es equivalente a $F(a)$. En general las expresiones con operadores lamda que están en posición de predicado pueden reducirse a expresiones sin operadores lamda. Debido a esto, parecería que no hay razón en absoluto para usarlos. Hay sin embargo un área en que resultan útiles, y es la lógica modal.

En la sección 7.4 hemos discutido varias ambigüedades que se pueden representar en lógica como consecuencias de diferencias de alcance. Diji-

[4] El operador lamda fue introducido por el lógico Alonzo Church en el llamado cálculo lamda, y ha resultado muy importante en el desarrollo de los lenguajes de computadora. En el sistema de Church, el operador lamda se usaba para representar la función de la clase de objetos que pueden ser valores de la variable ligada por el operador en la clase de las proposiciones expresadas por los enunciados que se obtienen si se fija la referencia de la variable en esos objetos.

mos allí que la complicación aumentaba cuando las ambigüedades hacen intervenir descripciones definidas. Ahora tenemos los instrumentos formales que son necesarios para formalizar estos casos. El ejemplo que dimos era el siguiente:

(2) Juan cree que el hombre que le robó era pelirrojo

Estudiemos primero el enunciado (3).

(3) El hombre que robó a Juan era pelirrojo

Representamos 'x roba a y' como $R(x, y)$ y 'x es pelirrojo' como $H(x)$. Con la ayuda del operador iota estudiado en la sección 9.3, tenemos lo siguiente:

(4) $$H\,(\iota x(R(x, j))$$

(2) se formalizaría ahora como sigue

(5) $$B_j\,H(\iota x(R(x, j))$$

Sin embargo, para poder representar la interpretación *de re* de (2), necesitaríamos una formalización en la que la descripción $\iota x\,(R(x, j))$ apareciera fuera del alcance del operador B_j. En este caso puede ayudarnos el operador lamda. Lo que buscamos es algo que puede parafrasearse como (6).

(6) El hombre que robó a Juan es tal (o tiene la propiedad de) que Juan cree que él es pelirrojo

Por lo tanto necesitamos un predicado con el significado 'ser un x tal que Juan cree que él es pelirrojo'. Esto puede escribirse como (λx) $(B_j\,(H(x)))$. Ahora podemos predicar (7) del hombre que robó a Juan.

(7) $$((\lambda x)\,(B_j(H(x))))\,(\iota y(R(y, j)))$$

(utilizamos y en vez de x como variable con la expresión iota para que quede más claro que no está ligada por el operador lamda).

Esta fórmula, de apariencia un tanto terrible, representa la interpretación *de re* de (2). La interpretación *de dicto* queda formulada por la expresión (5), más sencilla.

10

¿Lógica para lingüistas?

10.1. GENERALIDADES

En este capítulo final vamos a estudiar las relaciones entre lógica y lingüística y en qué medida la lógica nos da puntos de vista útiles para el estudio del lenguaje natural. Ni qué decir tiene que estos problemas son mucho más controvertidos que los que hemos discutido en los capítulos previos.

Supongamos que queremos saber qué nos puede decir la lógica sobre el significado y la estructura semántica en el lenguaje natural. Algunas de las cuestiones que se plantearán son las siguientes.

(1) ¿Cuál es el concepto de 'significado' propio de la lógica? ¿Es útil este concepto para fines lingüísticos?

(2) ¿De qué manera pueden utilizarse los lenguajes formales de la lógica al intentar describir el significado de las expresiones en lenguaje natural?

(3) ¿Son suficientemente ricos los lenguajes de la lógica para servir de modelos para la semántica del lenguaje natural? Si la respuesta fuera negativa, ¿hay medio de remediar sus deficiencias?

Cual sea la razón de estas preguntas es algo que puede no resultar inmediatamente obvio al lector, pero el comprender las relaciones entre lógica y lingüística consiste de hecho, en parte, en comprender por qué esas preguntas son relevantes.

10.2. EL CONCEPTO DE SIGNIFICADO

Empecemos con la primera cuestión. Habría que distinguir los dos problemas siguientes, fundamentales en semántica.

(a) ¿Qué es, en general, el significado?

(b) ¿Qué son los significados de las expresiones concretas en un lenguaje?

Es claro que ambas cuestiones no son fáciles de responder. Una de las razones fundamentales de ello es que, de otro modo que en otras áreas científicas, la semántica no describe directamente cosas del mundo, sino que trata más bien de los instrumentos que habitualmente se utilizan para describir cosas del mundo. El problema entonces es que o bien utilizamos esos instrumentos para describirse a sí mismos —es decir, utilizamos el lenguaje ordinario para describir el lenguaje ordinario— o encontramos instrumentos enteramente nuevos —es decir, inventamos un nuevo lenguaje para usarlo como metalenguaje. Sin embargo, en el segundo caso necesitamos el lenguaje ordinario como punto de partida para explicar el lenguaje que estamos construyendo.

Otra razón de la evanescencia del significado es que los significados de las expresiones en los lenguajes son entidades de carácter abstracto, 'intangible'. Esto dificulta enormemente la verificación y falsación en las hipótesis semánicas, lo que ha llevado en ocasiones —particularmente en la lógica formal— a intentar pasarse sin significados en absoluto o a reinterpretar el concepto de significado de tal manera que se evitara en la medida de lo posible la postulación de constructos teóricos. De hecho, cuando se construyeron los primeros sistemas modernos de lógica formal, muchos de sus creadores los consideraban como un objeto de estudio puramente SINTACTICO. La consecuencia lógica se consideraba una relación entre expresiones en el lenguaje formal, y las reglas de deducción, que permitían deducir algo a partir de otra cosa, se consideraban independientes de la interpretación de las expresiones, puesto que sólo tomaban en cuenta su forma.

El desarrollo de la semántica lógica en forma de teoría de modelos, fue posterior. La semántica modelística intenta explicar los significados únicamente en términos de nociones conjuntistas tales como conjuntos y funciones. Veamos un poco más de cerca este concepto de significado.

El significado de una expresión une la expresión con el mundo de manera a veces complicada. Por ejemplo, un predicado se relaciona con un conjunto de entidades en el mundo, más concretamente con el conjunto de entidades de las que el predicado puede predicarse con verdad.

Si queremos evitar el postular entidades abstractas, intangibles, en nuestra semántica, una manera de hacerlo es decir que lo único que importa con respecto al predicado es ese conjunto, la EXTENSION del predicado. Esto es lo que se hizo cuando se intentó por primera vez dar una semántica formal de la lógica de predicados: se supuso que se podía evitar el hablar de los significados de las expresiones hablando, en vez de significados, de extensiones. Sin embargo, como hemos visto en el capítulo de la lógica intensional, esto significa que tenemos que tratar expresiones no sinónimas —por ejemplo, *Orestes* y *el hermano de Electra*— como equivalentes cuando ocurre que tienen la misma extensión. En ese capítulo sugerimos que el modo de escapar del problema era postular algo llamado INTENSION. Vamos a estudiar ahora el problema de si las intensiones tal como se entienden en la lógica intensional se pueden identificar con los significados de las expresiones lingüísticas. Para comenzar estudiemos las relaciones entre intensiones y extensiones.

Ya hemos visto que el conocimiento de la extensión de una expresión no implica el conocimiento de su intensión, puesto que las expresiones no sinónimas pueden tener la misma extensión. ¿Qué pasa con la pregunta inversa? ¿Se sabe la extensión de una expresión si se conoce su intensión? Desde luego, no. Se puede entender muy bien qué significa la expresión *ser inteligente* y no saber exactamente quién es inteligente y quién no. En otras palabras: para saber la extensión de una expresión necesito saber dos cosas: la intensión de la expresión y cómo es el mundo de hecho. De hecho, podemos tomar esto como una definición de la extensión de una expresión: aquello que conocemos supuesto el conocimiento de la intensión de la expresión y de cómo es el mundo. Esto, dicho sea al margen, ilumina la concepción de los valores de verdad como extensiones de los enunciados, idea que ha resultado confundante a muchos: si se sabe qué significa un enunciado y cómo es el mundo, se puede decir si el enunciado es verdadero o falso.

Lo que hemos hecho es caracterizar las extensiones en términos de intensiones. Podemos invertir el problema y preguntar cómo podemos caracterizar el concepto de intensión en términos de extensión. Desde este punto de vista, que fue el adoptado en el capítulo 8, se puede decir que una intensión es un principio de **determinación de la extensión**: una regla por medio de la cual miramos al mundo y encontramos la extensión de la expresión.

La cuestión es cómo concretar estos principios. Volvemos aquí al problema discutido al principio: ¿cómo podemos describir los significados de las expresiones lingüísticas que pertenecen a un cierto lenguaje sin hacer uso decisivo del lengua mismo? La lógica intensional, lo hemos visto, pretende tener una salida a este dilema: en vez de hablar de principios que determinan la extensión al considerar el mundo, podemos ha-

blar de **funciones de mundos posibles en extensiones.** ¿Hay alguna diferencia? En el capítulo sobre teoría de conjuntos dijimos que una función es un modo de asignar una entidad a cada miembro en un conjunto (el dominio de la función). Hay diferentes maneras de entender una definición así, y la respuesta a la última pregunta depende de qué interpretación escojamos. Una posibilidad es identificar la función con una regla que asigna valores a los argumentos: en esta versión, función determinante de una extensión y principio determinante de una extensión son la misma cosa. Otra posibilidad, preferida por los lógicos, es identificar la función con el conjunto de pares ordenados en los que el primer elemento es un argumento de la función y el segundo es el valor de la función para ese argumento. La razón de preferir habitualmente la segunda alternativa es que así se reducen las funciones a una especie de entidad que ya está definida en teoría de conjuntos: conjuntos y pares ordenados. Sin embargo, si adoptamos el punto de vista según el cual las intensiones de las expresiones son, de hecho, conjuntos de pares ordenados, tendremos problemas, por lo menos si identificamos intensión y significado y queremos que nuestra teoría semántica tenga alguna realidad psicológica. Dado que hay —es de suponer— un número infinito de mundos posibles, tendríamos que pretender que cuando una persona aprende el significado de una expresión, aprende con ello un conjunto infinito de pares de objetos. Nos enfrentamos, entonces, con el siguiente dilema: o nos volvemos al modo intuitivo de entender las intensiones y abandonamos en consecuencia nuestra posibilidad de reducir nuestros conceptos a la teoría de conjuntos, o, alternativamente, mantenemos la definición de intensión como par ordenado y dejamos a un lado toda esperanza de realidad psicológica.

Hay otras dificultades en lo que atañe a la identificación de las intensidades con funciones de mundos posibles en extensiones. Hemos mencionado antes el caso de expresiones que tienen la mismo extensión pero diferentes intensiones. No parece que se dé la misma dificultad en la semántica modelística: por ejemplo, es de suponer que haya mundos lógicamente posibles en los que Walter Scott no escribió *Waverley,* y, por lo tanto, las funciones que operan como intensiones de los sintagmas nominales *Walter Scott y el autor de 'Waverley'* no tendrían el mismo valor para todos los argumentos y serían diferentes. Supongamos, sin embargo, que escogemos otro ejemplo, tomado por Frege. Según Frege las expresiones matemáticas '3 + 1' y '2 + 2' tendrían la misma extensión (*Bedeutung*), en concreto, el número 4, pero diferentes intensiones (*Sinn*). La idea es que '3 + 1' y '2 + 2' representan dos modos diferentes de obtener el mismo resulado. Sin embargo, si '2 + 2 = 3 + 1' es una verdad lógica, como suele considerarse de las verdades aritméticas, los valores de '2 + 2' y '3 + 1' son los mismos, en concreto 4, en todos los mundos posibles. En otras palabras, las expresiones '3 + 1' y '2 + 2' co-

rresponden a funciones idénticas de mundos posibles en números, y por lo tanto deberían tener las mismas intensiones. De modo general podemos decir que si entendemos las intensiones como funciones de mundos posibles en entidades, las expresiones lógicamente equivalentes resultan tener la misma intensión. De este modo se pierde la idea fregeana de que la intensión es el procedimiento en que se obtiene la extensión.

El mismo problema se plantea con respecto a la interpretación de las actitudes proposicionales. Supongamos que afirmamos lo siguiente:

(a) Las actitudes proposicionales son relaciones entre personas y proposiciones.

(b) Las proposiciones son funciones de mundos posibles en valores de verdad.

Como dijimos, dos expresiones cualesquiera que sean lógicamente equivalentes, corresponden a la misma función de mundos posibles, y por ello, dos enunciados lógicamente equivalentes corresponden, de hecho, a la misma proposición. Por ejemplo, toda verdad lógica expresa la misma proposición: la proposición **necesaria,** verdadera en todo mundo posible (la función que tiene el valor de verdad 'verdadero' para todo mundo posible). Pero consideremos una actitud proposicional tal como la creencia. Desde luego una persona puede creerse una verdad lógica y no creerse otra. Por ejemplo, supongamos que uno de mis amigos del departamento de lógica asegura haber demostrado dos teoremas. Resulta que es verdad, pero yo no he visto todavía las demostraciones y no puedo enjuiciarlas. Entonces decido creerme el primer teorema y no creerme el segundo. Pero si los dos teoremas son verdades lógicas y expresan la misma proposición, esto no debería ser posible. (El análisis de Hintikka del concepto de creencia, que mencionamos en la p. 112 implica que si uno se cree *p* se cree también todas las consecuencias de *p,* y por lo tanto se encuentra con las mismas dificultades).

Existen varias propuestas para salir del dilema planteado aquí. Una de las que merece mencionarse fue planteada por Carnap: Carnap sugiere que la sinonimia lingüística no debería definirse como igualdad de intensiones en el sentido modelístico, sino como algo más fuerte que hace intervenir lo que él llama **isomorfismo intensional.** Sin pretensiones de rigor diremos que dos expresiones son intensionalmente isomórficas si están formadas por expresiones constituyentes que tienen las mismas intensiones y éstas, a su vez, se han formado por medio de constituyentes con las mismas intensiones. Vemos que esto se acerca más a lo que Frege entendía por *'Sinn'*. De hecho, hemos introducido ya un término por medio del cual se puede definir el isomorfismo intensional. En la discusión de la lógica intensional y de la gramática categorial dijimos que un enunciado tiene una derivación semántica y una sintáctica, ambas representables en forma de diagramas arbóreos. La derivación semántica mos-

traba cómo se obtenía la interpretación del todo a partir de las interpretaciones de las partes. Por lo tanto, dos expresiones serían intensionalmente isomórficas si tienen la misma derivación semántica, definiendo este concepto como se hizo allí.

Desearíamos tratar aquí también la identificación de 'significado' y 'condiciones de verdad' (de los enunciados). Hay varios tipos de objeciones posibles a esta idea, algunas más serias que las otras. Ocupémosnos primero con la menos seria. Muchos lingüistas reaccionan en contra cuando oyen por primera vez afirmaciones tales como 'el enunciado E es verdadero sii...'. 'La verdad no tiene nada que ver con la lingüística', dicen; 'no es función del lingüista el decir qué enunciados son verdaderos y cuáles falsos'. Esta objeción está basada en la confusión de dos cosas diferentes: el valor de verdad de un enunciado y las condiciones de verdad del mismo. Desde luego, la función del lingüista no es decir qué enunciados son, de hecho, verdaderos; indicar, sin embargo, en qué condiciones un enunciado es verdadero, en otra cosa distinta.

Hay otra objeción más seria. Supongamos que, según hemos indicado más arriba, la intensión de un enunciado es un principio según el cual asignamos valores de verdad al enunciado en cada mundo posible. Como ya hemos dicho, querríamos que nuestra teoría tuviera algún tipo de realidad psicológica, es decir, los elementos de la descripción deberían corresponder, en alguna manera, a lo que sucede en la mente del hablante. Así las cosas, se plantea la cuestión de si hay alguna correlación entre lo que se asigna a un enunciado como interpretación y lo que hacemos cuando entendemos un enunciado pronunciado de hecho. Esperaríamos entonces que lo que hacemos cuando oímos un enunciado declarativo es mirar al mundo y ver si el enunciado es verdadero o falso en él. Sin embargo lo que de hecho hacemos es, más bien, imaginar cómo sería el mundo si el enunciado fuera verdadero; si pensamos que el hablante es digno de fe, cambiamos nuestra visión del mundo según lo que él dice. No parece, por lo tanto, que haya una correspondencia muy estrecha entre la interpretación de un enunciado en una semántica basada en las condiciones de verdad y el proceso de comprensión. Sin embargo, el lógico tiene una respuesta a esta cuestión. El lógico propondría una distinción entre 'la descripción de gramáticas o lenguajes posibles en tanto que sistemas semánticos abstractos por medio de los cuales se asocian símbolos con aspecto del mundo' y 'la descripción de los hechos sociológicos y psicológicos por medio de los cuales uno de esos sistemas abstractos viene a ser usado por una persona o población' (las citas son de Lewis (1972, 170)). La semántica lógica se ocuparía sólo de la primera, y las cuestiones sobre el uso de las expresiones lingüísticas no sería relevante en este contexto. Según Lewis, sólo se produce confusión en la mezcla de estos dos temas. Se podría objetar, sin embargo, que el estudio del lenguaje como sistema que asocia símbolos con aspectos del mundo sólo

es posible abstrayendo a partir del estudio del uso de los símbolos en el lenguaje, y la cuestión que se le plantea al lingüista es la de si la abstracción es empíricamente interesante.

La información contenida en las reglas semánticas que hemos formulado en los capítulos precedentes nos dice cómo derivar las interpretaciones de las expresiones complejas a partir de expresiones simples de manera independiente de las expresiones concretas que escojamos como punto de partida (salvo en el caso de las constantes lógicas). De hecho, la semántica lógica nos dice poco o nada sobre cómo se deben interpretar las expresiones simples. Esto la hace parecer abstracta, o simplemente, irrelevante, a muchas personas, pero tendríamos que recordar que si la semántica lógica nos dice algo interesante sobre cómo se interpretan los enunciados, ese algo está fundamentalmente del lado del análisis de cómo la interpretación de las expresiones compuestas se obtienen a partir de las expresiones simples o, si se quiere, de la contribución de la ESTRUCTURA al significado. No deberíamos esperar de la semántica lógica que nos dijera exactamente en qué situaciones un enunciado como *está lloviendo* es verdadero: nos puede decir algo, sin embargo, sobre las relaciones entre las situaciones respectivas en que este enunciado y su negación, *no está lloviendo,* son verdaderos.

10.3. EL PAPEL DE LOS LENGUAJES FORMALES EN EL ANALISIS DEL LENGUAJE NATURAL

Vamos a discutir la segunda cuestión que formulamos al principio del capítulo: ¿De qué manera pueden usarse los lenguajes formales de la lógica cuando intentamos describir el significado de las expresiones de los lenguajes naturales?

En primer lugar, puede ser oportuno considerar los motivos de la construcción de lenguajes formales. Como tuvimos ocasión de decir antes, el objeto fundamental de estudio del lógico no es el lenguaje natural per se sino, más bien, las inferencias lógicas. La estructura de las expresiones lingüísticas es de interés para el lógico sólo en la medida en que el conocimiento de esta estructura le ayuda a dar reglas para hacer deducciones correctas. Pero, por otro lado, dado que casi todos los aspectos de la estructura semántica de un enunciado juegan un papel en una u otra argumentación, casi todo en la semántica del lenguaje natural tiene interés potencial para el lógico. Esta es la razón de que no resulte de gran importancia el que se esté primariamente interesado en la argumentación lógica o en las expresiones del lenguaje. Hay otros factores, sin embargo, que complican la situación. En un principio, los lógicos

estudiaban enunciados en lenguaje natural y sus relaciones lógicas. Se encontró pronto que estos enunciados tenían propiedades inquietantes como vaguedad, ambigüedad, poca claridad estructural y significados dependientes del contexto. Esto condujo, naturalmente, a intentar construir modos de representar los significados que no tuvieran estos lamentables defectos.

Los 'lenguajes formales' construidos en los capítulos precedentes se han construido con estos fines. Sin embargo, es posible encontrar una cierta confusión en los libros de lógica en lo que toca a las relaciones exactas entre fórmulas lógicas y los enunciados del lenguaje natural que se supone que aquellas 'formalizan' o 'traducen'. Para el lingüista que estudia lógica en la esperanza de aprender algo sobre la naturaleza del significado, la cuestión de cuáles sean estas relaciones es, naturalmente, de primera importancia, aunque la respuesta no sea fácil de encontrar.

En el capítulo 3 discutimos el concepto de forma lógica. Encontramos, por ejemplo, que los razonamientos (5) y (6) en la p. 19 'tenían la misma forma lógica', entendiendo por 'forma lógica' aquellas propiedades, comunes a los dos razonamientos, que los hacían válidos. En la sección 3.2 dijimos que la forma lógica de los razonamientos y enunciados depende de la presencia de ciertas 'palabras o partículas lógicas'. Este acercamiento a la noción de forma lógica, que se encuentra en la mayoría de los manuales de lógica, tropieza con dificultades de varios tipos cuando se aplica al lenguaje natural. Para empezar, no es fácil determinar qué palabras hayan de considerarse 'lógicas'. De hecho, como se dijo en la sección 3.7, 'El alcance del análisis lógico', los diferentes sistemas de lógica (lógica proposicional, lógica de predicados, lógica modal, etc.), toman en cuenta muy diferentes aspectos de la estructura de los enunciados. Cada sistema tiene su propio conjunto de 'palabras y partículas lógicas' o, para usar un término técnico, **constantes lógicas.** Estas constantes lógicas son expresión de aquellos conceptos en los que se centra el sistema concreto. Desde luego es posible tratar como constantes lógicas un amplio número de palabras y morfemas del lenguaje natural que no han sido tratadas como tales hasta ahora en ningún sistema formal existente. Desde este punto de vista se podría argüir que no se debería hablar de la 'forma lógica de un enunciado' sino sólo de 'la forma lógica de un enunciado en el nivel de la lógica de enunciados', 'la forma lógica de un enunciado en el nivel de la lógica de predicados', etc. En otras palabras, 'forma lógica' sería relativa al sistema lógico con que trabajamos.

Además, el tratamiento tradicional de la forma lógica conduce a confusiones, puesto que se centra en la presencia o ausencia de palabras y morfemas en un enunciado y pasa por alto otras cuestiones de estructura. Por poner un ejemplo sencillo, la presencia de una palabra para la negación (*no*) en un enunciado no nos dice nada definido sobre las con-

clusiones que podemos sacar del enunciado, y en consecuencia, tampoco nos dice nada sobre su forma lógica, en tanto que no sepamos si la negación actúa sobre el enunciado entero o no (cfr. p. 34). Ahora bien, tan pronto como reconocemos que la estructura es importante para la forma lógica, se plantea la cuestión: ¿qué tipo de estructura? La importancia que se conceden a los criterios formales en lógica le hace buscar a uno propiedades del enunciado que se puedan determinar sólo con mirar el enunciado, es decir, propiedades estructurales manifestadas abiertamente. El problema es que aquello que queremos saber sobre la estructura del enunciado no está siempre 'en la superficie'. Que esto es así lo pone de manifiesto, entre otras cosas, la existencia de enunciados estructuralmente ambiguos en el lenguaje natural. Por ejemplo, como se puso de manifiesto en la p. 71, un enunciado castellano que contiene varios cuantores puede corresponder a más de una fórmula en la lógica de predicados, según cuál sea el alcance de los cuantores.

Así pues, la estructura lógica de un enunciado puede estar **encubierta.** En muchos juegos de palabras y adivinanzas está implícito un conocimiento de este hecho, por ejemplo, cuando la broma se apoya en la existencia de enunciados que parecen lo mismo pero, de hecho, son diferentes. Cfr. la siguiente cita de Lewis Carroll[1]: "¿Ves a alguien en el camino?", preguntó el Rey. "A nadie", respondió Alicia. "Ya me gustaría a *mí* tener unos ojos así", hizo notar el Rey, con tono molesto. ¡Ser capaz de ver a Nadie! ¡Y a esta distancia, además! ¡Vaya, es lo más que *yo* podría hacer para ver a la gente de verdad, con la luz que hay"... "¿A quién adelantaste en el camino?" continuó el Rey, extendiendo la mano hacia el Mensajero... "A nadie", dijo el Mensajero. "Exacto", dijo el Rey: "esta señorita le vio también. Así que Nadie anda más despacio que tú". "Lo hago lo mejor que puedo", dijo el Mensajero, en tono hosco. "¡Estoy seguro que nadie anda más deprisa que yo!" "No puede hacerlo", dijo el Rey, "o habría llegado aquí primero...".

Es obvio que el error aquí es tratar enunciados como *No he visto a nadie en el camino* y *No he visto a Juan en el camino* como si tuvieran la misma forma o estructura lógica. Hemos visto que la forma lógica de un enunciado puede estar encubierta. Algunos lógicos han han afirmado que esto sucede mucho más a menudo de lo que habitualmente se piensa. Así, Bertrand Russell afirmó que los enunciados que contienen descripciones definidas tienen una forma lógica bastante distinta de lo que haría pensar su estructura gramatical aparente (cfr. p. 158).

---

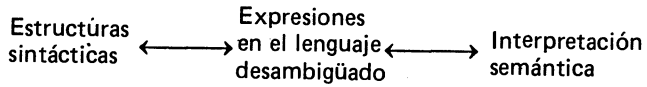
[1] He modificado la primera fase para mantener en lo posible el juego de palabras original. La cita original comienza con la siguiente frase de Alicia: "I see nobody on the road" (no veo a nadie en el camino a lo que Rey contesta "I only wish *I* had such eyes" (ya me gustaría a mí tener unos ojos así). El resto, como arriba. (N. del T.).

La existencia de propiedades lógicas encubiertas en enunciados del lenguaje natural implica que si queremos formular reglas de deducción basadas sólo en la forma de los enunciados, no podemos formular en lenguaje natural estas reglas de deducción para enunciados, sino que tenemos que construir un 'lenguaje formal' en el que se traduzcan los enunciados del lenguaje natural. Por lo demás, esta es una de las motivaciones fundamentales para la construcción de los lenguajes formales.

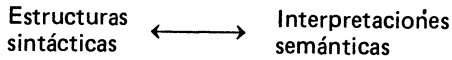
La idea de la existencia de estructuras encubiertas ocupa un puesto importante también en la gramática transformaciolnal, en donde la distinción entre *estructura profunda* y *superficial* juega un gran papel. En la 'teoría estándar' de Chomsky (Chomsky (1965)), la estructura profunda de un enunciado es la estructura sintáctica subyacente que determina la interpretación semántica del enunciado. Posteriormente la llamada 'semántica generativa' (Lakoff, McCawley, Postal, Ross) afirmaron que la estructura profunda de un enunciado se identificaba con su 'representación semántica'. Un paso posterior fue la utilización del término 'forma lógica' para referirse a este nivel de descripción. De manera coherente, las 'representaciones semánticas' que la semántica generativa postulaba tenían todo el aspecto de fórmulas de la lógica de predicados.

Esta idea podría discutirse largo y tendido, pero nos vamos a restringir a apuntar unas pocas cosas que deberían tenerse presentes, sin que por ello pretendamos que la semántica generativa no ha tomado conciencia de ellas. En primer lugar, habría que notar la diferencia entre 'representación semántica' e 'interpretación semántica'. Una representación semántica es un modo de hacer, por así decir, una disección de lo que un enunciado significa; no es el significado mismo. En efecto, en la mayoría de los casos una representación semántica es una expresión en otro lenguaje. En concreto, si se toman las fórmulas de la lógica de predicados como representación semántica de expresiones en castellano o en otro lenguaje natural, es claro que esas representaciones son también expresiones de un lenguaje —el lenguaje de la lógica de predicados— que tiene sus propias sintaxis y semántica. En otras palabras, las reglas que relacionan las representaciones semánticas con la sintaxis superficial han de ser complementadas con reglas que interpreten las representaciones semánticas, por ejemplo, con reglas como las de las pp. 86-87.

Dado que una de las propiedades que se supone distinguen primordialmente a las representaciones semánticas de las estructuras sintácticas superficiales es que las primeras no son ambiguas, podríamos decir que lo que hacemos cuando damos representaciones semánticas, independientemente de qué forma tengan, es construir un **lenguaje desambiguado,** el cual no puede ser el resultado final del proceso de construcción de interpretaciones semánticas para los enunciados, pero sí ha de ser un estadio intermedio. Podemos representar este proceso como sigue.



Cabría preguntarse por qué ha de aparecer un estadio intermedio y por qué no se podría tener, en vez del anterior, el siguiente modelo, más sencillo



Nótese que no hay nada que impida, en principio, que las reglas de la interpretación semántica tenga más de una salida para un sólo enunciado.

Hay, naturalmente, diferentes argumentos posibles para afirmar la necesidad del estadio intermedio. Uno de estos argumentos ya se ha apuntado: el deseo de poder construir reglas formales de deducción. Desde nuestro punto de vista, el modo más razonable de defender el uso de un lenguaje desambiguado, es decir, que, en cualquier caso, necesitamos un medio de referirnos a las interpretaciones semánticas, así que necesitamos construir un lenguaje desambiguado para lograrlo. Este punto de vista es aceptable en tanto se tenga presente que las 'representaciones semánticas' o expresiones del lenguaje desambiguado sólo son un instrumento auxiliar y no tienen un status independiente por sí mismas. Esto nos protegerá de mezclar las categorías sintácticas del lenguaje desambiguado, por ejemplo, 'enunciado' y 'predicado', con las categorías de la interpretación semántica, por ejemplo, 'proposición' y 'propiedad'.

Como se dijo en la p. 151, el método de utilizar un lenguaje desambiguado como un estadio intermedio en el proceso de asignar interpretaciones semánticas a enunciados en inglés fue empleado por Richard Montague en alguno de sus artículos (Montague (1974, p. 7)). En esta obra el carácter auxiliar del lenguaje desambiguado es perfectamente claro.

Nótese que lo dicho arriba es, de hecho, independiente de la naturaleza de las interpretaciones semánticas: es indiferente que se las considere representables por medio de 'árboles' como los empleados más arriba, o de un tipo radicalmente diferente.

10.4. LAS LIMITACIONES DE LA LOGICA CLASICA

Finalmente, hemos de intentar contestar la última cuestión que formulamos al comienzo del capítulo: ¿Son suficientemente ricos los lenguajes de la lógica para servir de modelos para la semántica de los lenguajes? Si la respuesta es negativa, ¿es posible remediar las deficiencias?

Dado que la lógica de predicados de primer orden se considera a menudo como una especie de sistema lógico clásico, podemos empezar viendo si hay distinciones en el lenguaje natural que no tienen contrapartida en la lógica de predicados y si estas distinciones tienen relevancia semántica.

Ya hemos visto que sólo unas pocas de las 'conectivas enunciativas' (conjunciones coordinativas) y 'cuantores' (numerales, adjetivos cuantificadores, etc.) del lenguaje natural se pueden traducir directamente a la lógica de predicados. También dijimos que las formalizaciones habituales de enunciados como *Todas las mozas son guapas* son poco seguras desde distintos puntos de vista.

Las distinciones entre clases léxicas importantes (nombres, adjetivos y verbos) del lenguaje natural no se conservan en la lógica de predicados. Mientras que los nombres propios se traducen como términos individuales, los nombres comunes, los adjetivos y los verbos se juntan todos en la clase de los predicados. Algunos lógicos, por ejemplo, Reichenbach, y la semántica generativa han pretendido que esto es una ventaja de la lógica de predicados y una deficiencia de la gramática tradicional. Sin embargo, es claro que las clases léxicas no son semánticamente irrelevantes: como se deba, empero, captar teóricamente esas diferencias, es una cuestión abierta.

Del mismo modo las subclases de nombres comunes (nombres contables y nombres de masa [2] (*countable nouns, mass noun*) no tienen contrapartida en la lógica de predicados. En general es difícil formalizar enunciados con nombres de masa en el lenguaje de la lógica de predicados. El lector puede intentarlo por sí mismo en un enunciado como (1).

(1) Estos días el oro está escaso, pero hoy he comprado un poco (hay que conceder, sin embargo, que hay una serie de razones distinas por las cuales (1) es difícil de formalizar).

Algunas categorías morfológicas no parecen tener ninguna contrapartida en lógica, por ejemplo, las conjunciones subordinativas, las prepo-

[2] Esta distinción, que no suele aparecer en las gramáticas del castellano, tiene relevancia morfológica en inglés. (N. del T.).

siciones (¿otro tipo de predicado?) y varios tipos de adverbio (pero cfr. p. 153 arriba).

Ya hemos estudiado las relaciones entre el artículo definido de, por ejemplo, el castellano, y el operador iota de la lógica de predicados (extendida).

Enunciados como los siguientes, algunos de los cuales se llaman 'genéricos' en las descripciones lingüísticas, no se pueden distinguir dentro de la lógica de predicados.

(2) (a) Un perro ladra
(b) El perro ladra (donde *el perro* se refiere a la especie)
(c) Todo perro ladra
(d) Los perros ladran
(e) Ladran todos los perros

Probablemente todos esos enunciados se representarían como (3)

(3) $$\forall x\,(D(x) \rightarrow B(z))$$

Los enunciados (d) y (e) se refieren a un conjunto definido de perros que viene determinado por la situación comunicativa, mientras que los otros se entienden como enunciados generales sobre la especie 'perro'. Una teoría que quiera tomar en cuenta este hecho habrá de tener un mecanismo que permita cambiar al universo del discurso durante el curso de una conversación y algún modo de expresar 'leyes generales'. Lo último puede alcanzarse con la ayuda de la lógica modal: diríamos, por ejemplo, que (a) no trata sólo de los perros que de hecho existen en nuestro mundo, sino que trata de todos los perros que existen en los mundos posibles en que las leyes de la naturaleza son las mismas que en el nuestro.

Necesitaríamos también un mecanismo para distinguir los enunciados con *todos* de los enunciados que no tienen esa palabra. En el lenguaje natural podemos formar enunciados generales que no son necesariamente falsados por la aparición de un contraejemplo, como sería el caso con las expresiones correspondientes con cuantor universal en la lógica de predicados. Por ejemplo, no diríamos que hemos mostrado que (a) es falso si encontramos un perro que no ladre.

Quizá la más clara limitación de la lógica de predicados es que sólo toma en cuenta los enunciados declarativos. Las expresiones imperativas e interrogativas caen enteramente fuera del sistema. La razón es que esos tipos de expresión tienen funciones bastante diferentes en los actos de comunicación: generalmente no se usan para transmitir información acerca del mundo. Se han hecho intentos, sin embargo, de construcción

de 'lógicas imperativas' y de 'lógicas de la interrogación'. Hay una clara división de opiniones en lo que toca al tratamiento correcto de este tipo de expresiones. Algunos lógicos (y lingüistas) creen que es posible manejarlas como tipos especiales de enunciados declarativos: esto posibilitaría el atribuirles valores de verdad. Una teoría, ampliamente difundida, que apoya esta idea es la **hipótesis performativa**: según esta teoría todo enunciado tendría una estructura subyacente cuya cláusula superior es una afirmación del hablante acerca de lo que hace con el acto comunicativo que realiza: por ejemplo, un enunciado imperativo tendría la estructura subyacente *Te ordeno que S*. Hay también otras hipótesis.

Incluso el significado de los enunciados declarativos —tomando 'significado' en el sentido que habitualmente se emplea— incluye aspectos que no pueden interpretarse con facilidad como veritativo-funcionales. Por ejemplo, sería difícil imaginar una situación en que uno de los enunciados de (4) fuera verdadero y el otro falso, aunque claramente tienen un significado diferente.

(4) (a) El vaso estaba medio lleno
(b) El vaso estaba medio vacío

Tampoco hay unanimidad en lo que toca a la determinación de qué aspectos de la semántica de los enunciados declarativos se pueden considerar como veritativo-funcionales, como vimos en el caso de las presuposiciones. Podríamos citar también enunciados que expresan juicios de valor, por ejemplo (5) - (6), los cuales, según algunas teorías de la filosofía moral, no son verdaderos ni falsos.

(5) Es inmoral tener comercio carnal sin estar casado
(6) Milton era un gran poeta

Así pues, aunque las limitaciones de la lógica de predicados son claras, muchos lógicos y lingüistas trabajan en la actualidad para extender la lógica de predicados o en la construcción de sistemas alternativos que sean más adecuados para servir de modelos para la semántica del lenguaje natural. Naturalmente no está decidido en qué medida hayan de tener éxito y si las ideas fundamentales de la semántica lógica son adecuadas para tratar los problemas del leguaje natural. Sea cual sea el resultado, creemos que hay varias razones para que el lingüista de orientación semántica estudie lógica. En primer lugar, el conocimiento de los conceptos fundamentales de la lógica es necesario para entender casi cualquier trabajo actual serio en semántica lingüística. En segundo lugar, los lógicos han tratado de contestar a una serie de cuestiones que son centrales para cualquier tipo de teoría semántica. Entre ellas contaríamos: ¿Qué tipo de objeto o entidad con los significados de las expresiones lingüís-

ticas? ¿Cómo están ligadas las expresiones lingüísticas con las cosas del mundo exterior? ¿Cómo es posible entender un número ilimitado de expresiones complejas cuando sólo se dispone del conocimiento de las interpretaciones de un número limitado de expresiones simples? ¿Cuáles son las relaciones entre lenguaje y razonamiento? ¿Cómo podemos describir el significado de infinitos enunciados con un número finito de reglas semánticas?

Las respuestas de los lógicos a estas preguntas puede que no sean las finales, pero en algunos casos son las únicas que existen. En tercer lugar, los sistemas formales construidos por los lógicos tienen la gran ventaja de ser EXPLICITOS. El desarrollo de la gramática generativa ha hecho entender a los lingüistas que un modelo explícito —incluso uno que sea falso— puede ayudarnos a ver en los problemas, poniendo en claro que es exactamente lo que sabemos y lo que desconocemos. Logramos conocimientos nuevos sobre el lenguaje humano estudiando las limitaciones reales de su modelo lógico.

Solución a los ejercicios

Cap. 2. TEORIA DE CONJUNTOS

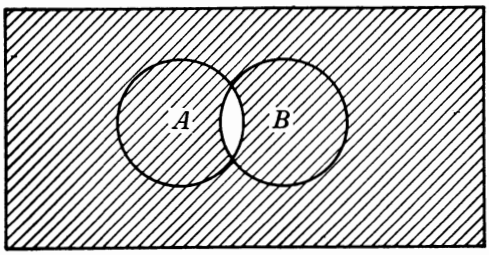
1. (*a*) $b \in C$; (*b*) $C \subset D$; (*c*) $A \cup C$; (*d*) $\{d, e, g\}$; (*e*) $d \notin A \cap B$; (*f*) $\complement A \subset B \cup C$

2. Los mozos a quienes María ha besado.
   Los daneses que son filósofos (los filósofos daneses).

3. {{Londres}, {Barcelona}, {Sevilla}, {Londres, Barcelona}, {Londres, Sevilla}, {Barcelona, Sevilla}, {Londres, Barcelona, Sevilla}}.

3. Verdaderas: (*a*), (*c*), (*d*), (*f*); falsa: (*e*).

5.



6. Verdaderas: (*a*), (*b*), (*d*), (*e*), (*g*); falsas: (*c*), (*f*).

7. Dominio: naciones; codominio: ciudades.
   Dominio: hombres casados; codominio: mujeres.
   Dominio: naciones; codominio: seres humanos.

Cap. 4. LOGICA DE ENUNCIADOS

1. (*b*) puesto que no puede interpretarse como $p \,\&\, q$. No es sinónimo de *Luis es pariente y Ricardo es pariente.*

2. (*a*) $p \to q$; (*b*) $p \,\&\, q$; (*c*) $q \to p$; (*d*) $(p \vee q) \,\&\, \sim r$; (*e*) $\sim (p \vee q) \to r$; (*f*) $\sim p \to q$ or $p \vee q$

3. (*a*) **f**; (*b*) **t**; (*c*) **f**; (*d*) **t**; (*e*) **t**; (*f*) **t**

4. (*a*), (*c*), (*d*), (*f*), (*h*)

5. No. Un enunciado como *Juan es feliz porque Mari le ama* puede ser verdadera o falsa aún en el caso de que ambos enunciados sean verdaderos. Por lo tanto el valor de verdad de *p porque q* no puede ser una función del valor de verdad de *p* y *q*.

6. (*a*) A*pq*; (*b*) EN*pq*; (*c*) EA*pq*K*pq*

7. (*a*) $p \,\&\, \sim q$; (*b*) $(((p \equiv q) \,\&\, r) \vee s) \to t$; (*c*) $(p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$

8. (*a*), (*b*) y (*c*) son tautologías.

Cap. 5. LOGICA DE PREDICADOS

1. (*a*) Alicia admira a Francisco.
   (*b*) Bartolo admira a Francisco y Francisco desdeña a Bartolo.
   (*c*) Alguien se admira a sí mismo.
   (*d*) No todos desdeñan a Francisco.
   (*e*) Todos los que admiran a Francisco se desdeñan a sí mismos.
   (*f*) No es verdad que haya alguien al que todos admiran.
   (*g*) Todos los que admiran a alguien no desdeñan a esa persona.

2. (*a*) $D(c)$
   (*b*) $L(c) \,\&\, S(o)$
   (*c*) $\sim \exists x(G(x) \,\&\, L(x, l))$
   (*d*) $\forall x(S(x) \to \exists y(B(y) \,\&\, R(x, y)))$
   (*e*) $\sim \exists x \forall y((S(x) \,\&\, Q(y)) \to A(x, y))$
   (*f*) $\forall x(S(x) \to F(x) \to \sim \exists x(S(x) \,\&\, G(x))$
   (*g*) $T(a) \to C(a)$

3. (*a*) reflexiva, simétrica, transitiva.
   (*b*) reflexiva, no-simétrica, transitiva.
   (*c*) irreflexiva, asimétrica, intransitiva.
   (*d*) no-reflexiva, no-simétrica, no-transitiva.

(*e*) irreflexiva, no-simétrica, transitiva (en el sentido biológico del término, excluyendo hermanastros).

4. La relación entre una persona y sus huellas digitales es una relación biunívoca, probablemente. Por ello es una función.

5. Por ejemplo: (*a*) admirar; (*b*) tener como resultado en el examen (cada estudiante tiene un cierto resultado); (*c*) padre de; (*d*) ser el marido de (en una sociedad monogámica).

6. Por ejemplo. $P(a) \,\&\, \sim P(a)$
o $(\forall x\,(M(x) \rightarrow C(x)) \,\&\, M(b)) \rightarrow \sim C(b)$

7. (*a*) $\exists x\,(B(x) \,\&\, S(v, x) \,\&\, S(k, x))$
(*b*) $\exists x\,(B(x) \,\&\, S(v, x)) \,\&\, \exists y\,(B(y) \,\&\, S(k, x))$, donde B está por 'oso' y S por 'vio', v se refiere a Ricardo y k a Juan.

8. (*a*) $\exists y \forall x\, H(x, y)$
(*b*) $\forall x \exists y\, H(x, y)$, donde H está por 'odia'.

9. Por ejemplo: 'ser más grande que' y 'ser más pequeño que'.

10. Un predicado binario se interpreta como una clase de pares ordenados.

11. $\exists x\,(P(x) \,\&\, E(x))$, donde P está por 'poder' y E por 'maligno'.

12. Un enunciado abierto es una fórmula lógica con, al menos, una variable libre.

13. Son equivalentes: (*a*) y (*c*); (*b*) y (*f*); (*d*) y (*g*)

14. (*a*) G: $\{b, c\}$
L: $\{\langle a, a\rangle \langle c, b\rangle \langle b, c\rangle\}$
(*b*) G: $\{b, c\}$
L: $\{\langle a, a\rangle \langle c, b\rangle \langle b, c\rangle \langle a, c\rangle\}$

15. Enunciados verdaderos. (*c*) y (*f*).
Enunciados falsos: (*a*), (*b*), (*d*), (*e*), (*g*) y (*h*).
Ver que (*h*) es falso es un poco difícil, pero si se estudia la interpretación, verá que d ama a a y a ama a d, pero d no ama a d. No hay nada que impida que las dos variables, x y z, se refieran a la misma persona, como ocurre en este ejemplo.

16. (*a*) $H(a)$
(*b*) $\sim H(a)$
(*c*) $\sim \forall x L(x, a)$
(*d*) $\exists x L(x, c)$
(*e*) $\exists x \forall y L(y, x)$

17. La siguiente interpretación hace verdaderos a todos los enunciados del ejercicio 1).

A: $\{\langle b, f\rangle \langle a, a\rangle\}$
D: $\{\langle f, b\rangle \langle b, b\rangle\}$

Cap. 6. DEDUCCION

1. Generalización Existencial.

2. $p \equiv q$ premisa
$(p \to q)$ & $(q \to p)$ Eliminación de la equivalencia
$q \to p$ Eliminación de la conjunción

3. p premisa
$\sim \sim p$ Introducción de la doble negación
p Eliminación de la doble negación

4. (a) $(p \to q)$ & $(q \to r)$ supuesto
(b) $p \to q$ de (a) por Eliminación de la conjunción
(c) $q \to r$ de (a) por Eliminación de la conjunción
(d) p supuesto
(e) q de (b) y (d) por modus ponens
(f) r de (c) y (e) por modus ponens
(g) $p \to r$ de (d)-(f) por Condicionalización
(h) $((p \to q)$ & $(q \to r)) \to (p \to r)$ de (a)-(g) por Condicionalización

5. (a) $p \equiv q$ premisa
(b) q premisa
(c) $(p \to q)$ & $(q \to p)$ de (a) por Eliminación de la equivalencia
(d) $q \to p$ de (c) por Eliminación de la Conjunción
(e) p de (b) y (d) por modus ponens

6. (a) $S(g)$ & $H(g)$ premisa
(b) $\forall x(S(x) \to D(x))$ & $\forall y(H(y) \to M(y))$ premisa
(c) $S(g)$ de (a) por Eliminación de la conjunción
(d) $H(g)$ de (a) por Eliminación de la conjunción
(e) $\forall x(S(x) \to D(y))$ de (b) por Eliminación de la conjunción
(f) $\forall y(H(y) \to M(y))$ de (b) por Eliminación de la conjunción
(g) $S(g) \to D(g)$ de (e) por Singularización universal
(h) $H(g) \to M(g)$ de (f) por singularización universal

(*i*) $D(g)$ de (*c*) y (*g*) por modus ponens
(*j*) $M(g)$ de (*d*) y (*h*) por modus ponens
(*k*) $D(g)$ & $M(g)$ de (*i*) y (*j*) por Introducción de la conjunción

7. (*a*) p & q premisa
(*b*) p por Eliminación de la conjunción
(*c*) $\sim \sim p$ por Introducción de la doble negación

Cap. 7. LOGICA MODAL

1. (*a*) $N\forall xF(x)$; (*b*) $\forall x(N\exists y(F(x, y)))$
2. $N(p \vee \sim p)$
3. $M\forall x(S(x) \rightarrow \exists y(B(y) \ \& \ R(x, y)))$

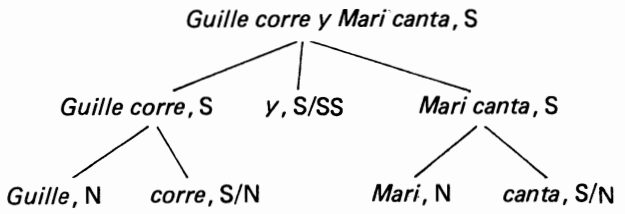
$M\exists y\forall x$
$\forall xM\exists y$
$\forall x\exists yM$
$\exists y\forall xM$
$\exists yM\forall x$
} $S(x) \rightarrow B(y) \ \& \ R(x, y)))$

4. La razón es que en el primer argumento *una viuda* ha de interpretarse con referencia a un momento del tiempo; cuando aparece en un enunciado con un verbo en pasado se toma como punto de referencia temporal de *una viuda* un momento del pasado. Por lo tanto, *una viuda* tiene puntos de referencia temporales distintos en los dos enunciados en que aparece.

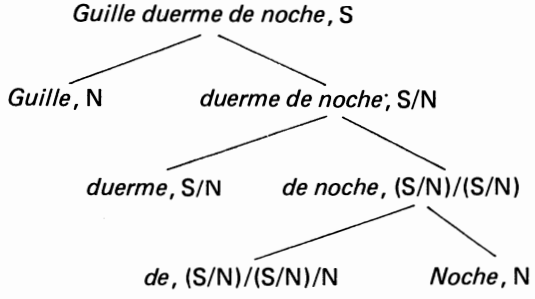
Cap. 8. LOGICA INTENSIONAL Y GRAMATICA CATEGORIAL

1. Intensional: adorar, buscar, imaginar

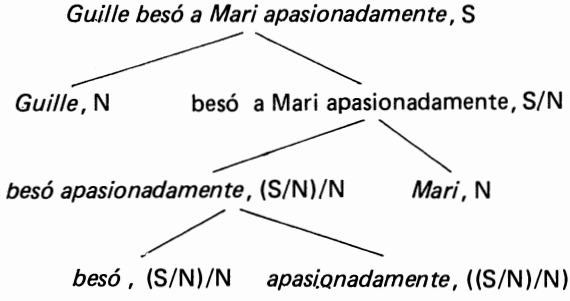
2. (*a*)



(*b*)

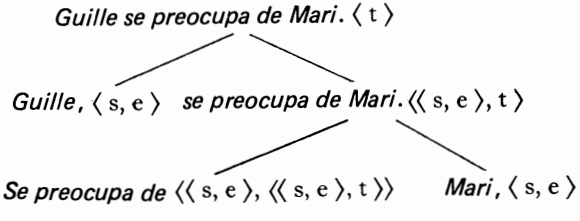


(*c*)

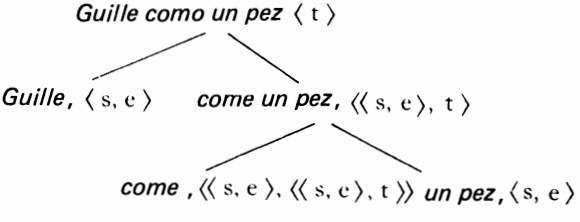


Se pueden dar diferentes estructuras a los tres enunciados. La gramática categorial permite la mayoría de las estructuras. Las tres que hemos dado parecen las más razonables desde un punto de vista semántico. (Así, la estructura de ((*c*)) difiere de la asignada a (5) en el texto)

3. (*a*)

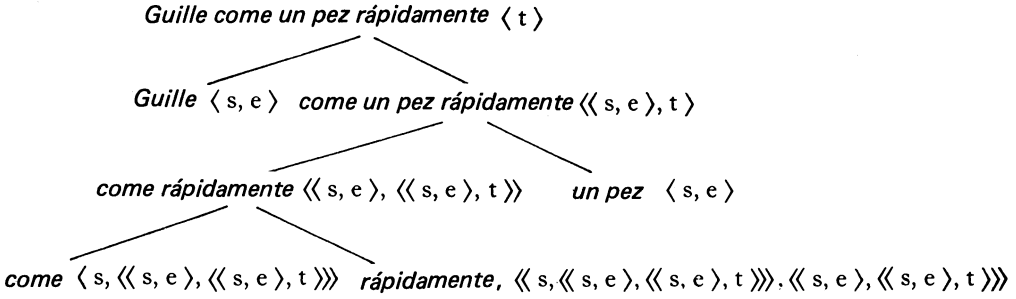


(*b*)



se puede reducir

(*c*)



Se puede reducir

Referencias

Ajdukiewicz, K. 1935. 'Die syntaktische Konnexität', *Studia Philosophica* (Warsaw), 1, 1–28.

Anderson, J. and Johnstone, H. 1962. *Natural Deduction*, Belmont, Calif.: Wadsworth.

Austin, J. L. 1962. *How to Do Things with Words*, Oxford: University Press.

Bar-Hillel, Y. 1970. *Aspects of Language*, Jerusalem: Magnes Press.

Carnap, R. 1947. *Meaning and Necessity*, Chicago: University of Chicago Press.

1958. *Introduction to Symbolic Logic and Its Applications*, New York: Dover.

Chomsky, N. 1957. *Syntactic Structures*, The Hague: Mouton.

1965. *Aspects of a Theory of Syntax*. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press.

Cooper, D. 1974. *Presupposition*, The Hague: Mouton.

Cooper, R. and Parsons, T. 1976. 'Montague grammar, generative semantics and interpretative semantics', en B. Partee (ed.), *Montague Grammar*, New York: Academic Press, pp. 311–62.

Cresswell, M. 1973. *Logics and Languages*, London: Methuen.

Davidson, D. and Harman, G. (eds.) 1972. *Semantics of Natural Language*, Dordrecht: Reidel.

Davies, P. 1973. *Modern Theories of Language*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Fillmore, C. J. and Langendoen, D. T. (eds.) 1971. *Studies in Linguistic Semantics*, New York and London: Macmillan.

Fodor, J. and Katz, J. J. 1963. 'The structure of a semantic theory', *Language* 39, 170–210.

van Fraassen, B. C. 1971. *Formal Semantics and Logic*, New York and London: Macmillan.

Frege, G. 1952. 'Ueber Sinn und Bedeutung', en P. Geach and M. Black (trs. and eds.), *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Oxford: Blackwell, pp. 56–78.

Geach, P. 1972. 'A program for syntax', en Davidson and Harman (eds.) 1972, pp. 483–97.

Grice, H. P. 1975. 'Logic and conversation' en P. Cole and J. Morgan (eds.), *Syntax and Semantics*, III, New York: Academic Press, pp. 41–58.

Halmos, P. R. 1960. *Naive Set Theory*, Princeton, N.J.; Van Nostrand.

Hintikka, J. 1962. *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions*, Ithaca, N.Y. and London: Cornell University Press.

1969. *Models for Modalities*, Dordrecht: Reidel.

Hughes, G. E. & Cresswell, M. J. 1968. *An Introduction to Modal Logic*, London: Methuen.

Husserl, E. 1962. *Ideas*, London: Collier.

Kalish, D. and Montague, R. 1964. *Logic*, New York: Harcourt, Brace and World.

REFERENCIAS

Kaplan, D. 1963. 'Foundations of intensional logic', **tesis doctoral inédita,** University of California at Los Angeles.

Katz, J. J. 1972. *Semantic Theory*, New York: Harper and Row.

Katz, J. J. and Postal, P. 1964. *An Integrated Theory of Linguistic Descriptions*, Cambridge, Mass.: M.I.T. Press.

Kneale, M. and Kneale, W. 1962. *The Development of Logic*, Oxford: University Press.

Kripke, S. 1963. 'Semantical considerations on modal logics', *Acta Philosophica Fennica*, 16, 83–94.

1972. 'Naming and necessity', **en** Davidson and Harman (eds.), 1972, pp. 253–355.

Lakoff, G. 1970. 'Counterparts, or the problem of reference in transformational grammar', **en** S. Kuno, *Report No. NSF-24 to the National Science Foundation*, Cambridge, Mass.: Harvard Computational Laboratory, pp. 23–37.

Lambek, J. 1961. 'On the calculus of syntactic types', **en** R. Jakobson (ed.), *On the Structure of Language and Its Mathematical Aspects*, Providence, R.I.: American Mathematical Society.

Leibniz, G. W. 1952. *Discourse on Metaphysics*, tr. P. Lucas and L. Grint, Manchester: University Press.

Lewis, D. 1968. 'Counterpart theory and quantified modal logic', *Journal of Philosophy*, 65, 113–26.

1972. 'General semantics', **en** Davidson and Harman (eds.), 1972, pp. 169–218.

1973. *Counterfactuals*, Oxford: Blackwell.

Lipschutz, S. 1964. *Theory and Problems of Set Theory and Related Topics*, New York: Schaum.

Lyons, J. 1968. *Introduction to Theoretical Linguistics*, Cambridge: University Press.

Mates, B. 1965. *Elementary Logic*, Oxford: University Press.

Mendelson, E. 1964. *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, N.J.: Van Nostrand.

Montague, R. 1974. *Formal Philosophy: Selected Papers of Richard Montague*, ed. R. Thomason, New Haven, Conn., and London: Yale University Press.

Olshewsky, T. M. (ed.) 1969. *Problems in the Philosophy of Language*, New York: Holt Rinehart and Winston.

Partee, B. 1975. 'Montague grammar and transformational grammar', *Linguistic Inquiry*, 6: 2, 203–300.

Petöfi, János, S. and Franck, Dorothea (eds.), 1973. *Präsuppositionen in Philosophie und Linguistik/Presuppositions in Philosophy and Linguistics*, Frankfurt: Athenäum.

Post, E. 1936. 'Finite combinatory processes – formulation I', *Journal of Symbolic Logic*, 1, 103–5.

Prior, A. N. 1957. *Time and Modality*, Oxford: University Press.

1967. *Past, Present and Future*, Oxford: University Press.

Prior, A. N. 1968. *Papers on Time and Tense*, Oxford: University Press.

Quine, W. V. O. 1963. *From a Logical Point of View*, New York: Harper.

1964. *Word and Object*, Cambridge, Mass.: M.I.T. Press.

1970. *Philosophy of Logic*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Reichenbach, H. 1966. *Elements of Symbolic Logic*, New York: Free Press.

Rescher, N. 1968. *Topics in Philosophical Logic*, Dordrecht: Reidel.

Resnik, M. 1970. *Elementary Logic*, New York: McGraw-Hill.

Rosenberg, J. and Travis, C. (eds.) 1971. *Readings in the Philosophy of Language*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Stalnaker, R. 1968. 'A theory of conditionals', en N. Rescher (ed.), *Studies in Logical Theory*, Oxford: Blackwell, pp. 98–112.

Steinberg, D. and Jacobovits, L. A. (eds.) 1971. *Semantics: An Interdisciplinary Reader in Philosophy, Linguistics and Psychology*, Cambridge: University Press.

Stoll, R. R. 1961. *Introduction to Set Theory and Logic*, San Francisco and London: Freeman.

Strawson, P. F. 1967. *Introduction to Logical Theory*, London: Methuen.

Tarski, A. 1965. *Introduction to Logic*, Oxford: University Press.

Thomason, R. 1970. *Symbolic Logic*, London: Macmillan.

Voltaire, 1759. *Candide*.

Indice alfabético

Los números de página en negrita indican definiciones o análisis definitorios

abstracción, operador de, 170
accesibilidad, 126
accidental, propiedad, 132
actitud proposicional, 126, 176
adjetivos, 183
Adjukiewicz, Kazimierz, 146
adverbios, 122, 134, 154, 162, 184
afirmación, 33
alcance, 127, 136; de la negación, 56; de los cuantores, 76, 79
alética, lógica, 126
alternatividad, 126
análisis lógico, 37s, 50s
analítico, enunciado, 35s
analítica, verdad y falsedad, 34s
aplicación funcional, reglas de, 150
árbol de análisis, 150
argumento: de una función, 147; de un predicado, 72
asignación, 21
—, función de, 97
asimetría, 101
atómico, enunciado, 36
Austin, John, 167
autonomía de la sintaxis, 146
axiomas, sistemas aviomáticos, 116s

Bar-Hillel, Yehoshua, 146
Bedeutung, 140
bulomaica, lógica, 126

característica, función, 23, 152, 158
Carnap, Rudolf, 140, 141, 176
Carrol, Lewis, 180
caso, 33
categorial, gramática, 146s
categorial, presuposición, 164
—, sintaxis, 150
categorías (básicas *vs* funcionales), 147, 151; derivadas o funcionales, 147, 150, 151
Chomsky, Noam, 181
Church, Alonzo, 140, 170
ciertamente, 122
clase, 15
codominio, 22
colección, 20
competencia, norma de, 168
complemento, 19
compuestos, enunciados, 36
comunes, nombres, 183
comunicativas, normas, 168
concatenación, 147
conceptibilidad, 125
conceptualismo, 142
conclusión, 26
condición necesaria/suficiente, 53
condicionalización, 113
condiciones: de éxito, 167; de verdad, 59, 143, 169, 177
conectiva, 38, 42, 54, 183
—, principal, 54
conjunción, 42, 44, 46; asociativa, 46; conmutativa, 45; coordinativa/subordinativa, 183
conjunción, eliminación de, 110
—, introducción, de, 110
conjunto, 13; vacío, 14; potencia, 17; unidad, 14; universal, 15
conjunto de conjuntos, 20
conjunto-verdad, 34, 123
consecuencia lógica, 28, 173
constante: de individuo, 71, 84; lógica,

39, 179; de predicado, 71, 84
constitutiva, estructura, 54
contexto: intensional/extensional, 153; transparente/opaco, 131
contingente, propiedad, 132
contradicción, 35, **62s**
contrafácticos, enunciados, 51, 133
contrapartidas, 13
conversa, relación, 103
Cooper, Robin, 161
coordinación, 36
correferenciales, términos, 130
Cresswell, Max, 146
cuádruplo, 20
cuantificación: restringida, **79**; **vacía, 75**
cuantor, 73s, 123; universal, **74**, 128, 184; existencial, 77; orden de 81; alcance de 78, 81-82

de dicto, **127**, 131, 171
de re, **127**, 131, 171
deducción 109s
—, reglas de **117s**; en la conversación cotidiana, 117s
deductiva, lógica, 27
deductivo, sistema, 109s
deíctica, expresión, 134
deóntica, lógica, 124
deónticos, operadores, 124
dependientes del contexto, 134
desambiguado, lenguaje, 160, 182
descripción, 14; definida, 163
descriptibilidad, 125
deseabilidad, 125
diagrama: de cuadro, 55; de árbol, 54
diccionario, expresiones del, 149
diferencia, 18
discurso, universo del, 15, **74**
disyunción, 42, **46s**; inclusiva/exclusiva, 47-48
disyunción, eliminación de, 111
—, introducción de, 111
doble negación, eliminación de, 112
— —, introducción de, 112
dominio: de una función, 22; de las intensiones, 144; de un predicado, 165

Electra, paradoja de, 140
elementos de un conjunto, 13
enumeración, 14
enunciados: 132, 162s; abierto, 71; atómico, 36; compuesto, 36; contrafáctico, 51, 133; declarativo, 185; genérico, 184; imperativo, 185; interrogativo, 185; análisis lógico de, 38s; molecular, 36; simple, 36; sintético, 35; lógica de, 38s
epistémica, lógica, 126s
equivalencia, 42, **52**
—, eliminación de, 122
—, introducción de, 112
—, relación de, 103
estilo directo/indirecto, 32
estructura: profunda, 160, 181; constitutiva, 54; abierta/encubierta, 180
estoicos, 140
existencial, cuantor, 79
—, presuposición, 164
éxito, 167
expresiones bien formadas (e, b, f), 56
—, del diccionario, 149
extensión, 15, 139s, 165, 174
—, principio de determinación de, 174
extensional, conjunto, 15
—, contexto, 153
—, predicado, 141
—, tipo, 151, 159
extensionalidad, principio de 14

falso, 166s
falla del valor de verdad, 169
familias (de conjuntos), 17
forma: gramatical, 30; lógica, **29s**, 179, 181
formación, reglas de, 56s
formal, lenguaje, 57, 178
Frege, Gottlob, 140, 164, 176-7
—, principio de, 145s
función, 21-22, 175, de asignación, **97**; característica, 21; enunciativa, 75; de verdad, 40, 50, **65**; general de asignación, 144
funciones de mundos posibles en extensiones, 175
funtor 147 (= conectiva, 42s)
funtorial, expresión, 149
futuro, 137

Geach, Peter, 146
generalización existencial, 115
generativa, semántica, 181, 183
genérico, enunciado, 184
gramática de Montague/gramática transformacional, 145, 160
gramatical, forma, 30
grupo, 13

Hintikka, Jaakko, 127, 176
hiponimia, 35
hipotaxis, 36
Husserl, Edmund, 146

ideales, mundos, 125
identificación mundo a través (transmundana), 132
implicación, 42, 49s
— estricta, 123s
— material, 50, 123
—, eliminación de, 112
—, introducción de, 113
inclusión, 16
indexicales, expresiones, 134
índices, 135
indirecto, estilo, 32
—, razonamiento, 65, 118
individuo, concepto de, 151
—, constante de, 71, 84.
—, término de, 72
—, variable de, 71
inducción matemática, 58
inductiva, lógica, 27
inferencia: lógicamente válida, 27s (= reglas de deducción, 117)
información nueva/antigua, 168
intensión, 15, 131, 139s; de los enunciados, 151, 174
intensional, contexto, 153
—, gramática, 159
—, isomorfismo, 176
—, lógica, 131, 139s, 174s
—, predicado, 141
—, tipo, 159
interpretación, 845
— semántica, reglas de, 160
intersección, 16
intransitiva, relación, 102
iota, operador, 166
irreflexiva, relación, 101
isomorfismo (entre sintaxis y semántica), 145, 152; intensional, 176

Kaplan, David, 142
Kripke, Saúl, 133, 142

Lakoff, George, 133, 181
lamda, operador, 170
lector, 140
Leibniz, G. W. von, 33
lenguaje: desambiguado 182; formal, 57, 178; — objeto, 57
Lesniewski, Stanislaw, 146
Lewis, David, 133, 177
léxica, clase, 183
ley de tercio excluso, 117
ligada, variable, 76
lógica: alética, 126; bulomaica, 126; deductiva/inductiva, 27; epistémica, 126; modal, 121s; de predicados, 70s, 162s; proposicional, 37s; de enunciados, 37s; limitaciones de la clásica, 183
lógica, conectiva, 42
—, consecuencia, 28, 173
—, constante, 39
—, forma, 29s, 179, 181
—, paradoja, 140
—, partícula, 30
—, semántica, 84, 173
—, verdad, 34
lógico, análisis, 37, 70s

McCawley, James, 181
material, implicación, 50, 123
metalenguaje, 57, 173
metavariable, 58
miembros (de un conjunto), 13
modal, adverbio de enunciado, 154
—, lógica, 121s, 127
—, — — enunciados, 122
—, — — predicados, 122
—, operador, 121s
—, verbo, 122
modalidad 121s; *de dicto/de re*, 127
modelo, 84
modelística, semántica, 84, 173
modo, 121
modus ponens, 112
modus tollens, 114
Montague, gramática de 145; y gramática transformacional, 160
Montague, Richard, 142, 145, 182
multívoca, relación, 104
mundo: de creencia, 127; posible, 33, 122, 175; ideal, 125

necesaria, condición, 53
—, propiedad, 132
—, proposición, 176
necesario (concepto de), 122
negación, 180; alcance de la, 56
— (conectiva), 42
—, introducción de, 114
nombre, 146, 183
no-reflexiva, relación, 101

norma de competencia, 168
normas comunicativas, 168
no-simétrica, relación, 101
no-transitiva, relación, 102

o, 46s
o bien ... o bien, 48
objeto, lenguaje-, 57
opacidad, 130
opaco, contexto, 131
operación (tipo de función) 22
— en conjuntos, 17
operadores: de abstracción, 170; deóntico, 124, iota, 166; lamda, 170; modales, 121; de predicado, 162; temporales, 135
oraciones completivas, 162
orden, lógica de primer, 70s
orden de los cuantores, 81
ordenados, n-tuplos, 20

par, 20
paradoja de Electra, 140
parataxis, 36
paréntesis, 55
Parsons, Terence, 161
partículas lógicas, 30
pasado, tiempo, 136
performativa, hipótesis, 185
polaca, notación, 69, 108
posibilidad lógica, física, práctica, etc., 124
posible lógicamente, 122
—, mundo, 23, 122, 174
posiblemente, 122
Postal, Paul, 181
postulado de significación, 158
pragmático, análisis — de las presuposiciones, 167
predicado: constante de, 71, 84; dominio de un, 165; extensión de un, 139s; operador de, 162s; término de 72; variable de, 71
predicados, lógica de: de primer orden, 70s; modal, 121; de segundo orden, 162s
preposición, 184
presuposición, 163s; categorial, existencial, factiva, 164; análisis pragmático de 167
Prior, Arthur, 135
probabilidad, 119
—, teoría de, 122
propios, nombres, 183
propiedad, 132; esencial, 132
proposición, 31s, 151, 163
proposicional, cálculo, 56
—, conectiva, 38, 183
—, lógica, 37, 56s
—, variable, 39
proposicionales, actitudes, 126, 176

quíntuplo, 20

ramificación, 56
rango de una función, 22
— de una intención, 144
razonamiento indirecto, 65, 118
realismo, 142
recursiva, regla, 58
recursividad, 153
reducción de predicados extensionales, 158
reductio ad absurdum, 65s
referencia, puntos de, 134
reflexiva, relación, 101*s*
reflexividad, 101, 126
regimentación del lenguaje natural, 160
reglas: de deducción, 117, 173; del sistema deductivo, 109s; de formación, 56-57; de aplicación funcional, 150; de estructura de frase, 58; recursivas, 58; de interpretación semántica, 160; de deletreo, 149; de traducción, 160
Reichenbach, Hans, 162, 183
relación, 20, 101s; unívoca, 103; biunívoca, 103; multívoca, 104
relación de nombrar, 143
relaciones entre conjuntos, 16
— y funciones, 20
—, propiedades formales de, 101s
relevancia, norma de, 168
representación semántica, 181
Ross, John, 181
rótulos, 57
rotulados, paréntesis, 57
Russell, Bertrand, 140, 167, 180

S4, S5, sistemas, 127
salva veritate, 131
satisfacción, 98s
secuencia, 22
segunda persona, pronombre, de 168
segundo orden, lógica de predicados de, 162s
semántica generativa, 181
semántica: modelística, 84, 173; de la

lógica de predicados, 84s; versión formal,96; de la lógica de enunciados, 56s
semántica, reglas de interpretación, 160
—, representación, 181
semánticos, tipos, 151
semejanza, grados de, 133
si, 133; construcciones con *si* 123
si ... entonces, 42, 49s
Sinn, 140
significado: concepto de, 172s; de una expresión lingüística, 140s
simetría, 101
singularización universal, 115
sinonimia, 35
sintaxis de la lógica de enunciados, 56
— de la lógica de predicados, 70s, 82
sintético, enunciado, 35
sistema T, 127
situación, 33
Stalnaker, Robert, 133
Strawson, P. F., 166
subconjunto, 16
subordinación, 36

tablas de verdad, 43, 62
tautología, 62s
temporal, lógica, 134-135
temporales, operadores, 134
teorema, 116
teoría de conjuntos, 13
teoría estándar (chomskyana), 181
— de modelos, 84
tercio excluso, ley de, 117
término de individuo, 72
tipos semánticos, 151, 159
traducción, reglas de, 160
transformación, 21
transitiva, relación, 102
transitividad, 102
transparente, contexto, 131
trío ordenado (triplete), 20

unidad, conjunto, 14
unión, 17
universal, conjunto, 15
universo del discurso, 15, 74

valor de una función, 22, 147
—, juicios de, 185
— de verdad, 23, 40, 143, 163s
variable: ligada/libre, 76; de individuo, 71; de predicado, 72, proposicional o de enunciado, 39
verbos, 183
verdad analítica, o en todo mundo posible, 34; o en toda interpretación, 89s; lógica, 34
verdad y éxito, 167
vocabulario lógico, 56-57

y, 14, 36, 42, 48

OTROS LIBROS PUBLICADOS POR EDITORIAL

PARANINFO S.A.

LINGÜISTICA Y FILOLOGIA

CUARTAS.– Curiosidades del Lenguaje.
HYMAN.– Fonología.
LINARES.– Estilística. Teoría de la puntuación. Ciencia del estilo lógico.
MADARIAGA.– Poetas hispanoamericanos de ayer y de hoy. Antología.
MANDOUNE y MANGADA.– Redacte mejor comercialmente (3ª edición).
MARTIN-VIVALDI.– Curso de redacción (19ª edición).
MATTEWS.– Morfología. Introducción a la teoría de la estructura de la palabra.
MONROY CASAS.– La pronunciación del inglés R.P. para hablantes de español.
NICOULIN.– Conjugación de verbos franceses.
POLO.– Ortografía y Ciencia del Lenguaje.
ROBINS.– Breve historia de la língüística.
ROBLES.– Lengua y habla en la escuela actual.

DICCIONARIOS

HORTA.–Diccionario de sinónimos, ideas afines y de la rima (4ª edición).
LEAL.– Diccionario naval (inglés-español y español-inglés).
MACHADO.– Diccionario técnico de la construcción (francés-español y español-francés).
MALGORN.– Diccionario técnico español-francés.
MALGORN.– Diccionario técnico español-inglés.
MALGORN.– Diccionario técnico inglés-español.
MARTINEZ DE SOUSA.– Diccionario general del periodismo.
MENDEZ.– Diccionario técnico de la industria del petróleo (español-inglés-francés).
MERINO.– Diccionario de dudas inglés-español (2ª edición).
MERINO.– Diccionario temático inglés-español y español-inglés.
OLIVETTI.– Diccionario de informática inglés-español.
ONIEVA.– Diccionario múltiple. Nueve diccionarios en un solo volumen: (Sinónimos y antónimos. Palabras homófonas. Palabras de dudosa ortografía. Palabras isónimas y parónimas. Palabras parónimas por el acento. Palabras parónimas por la pronunciación. Rimas poco comunes. Refranes, dichos y sentencias. Frases latinas. Ceceo y seseo. Curiosidades) (2ª edición).
SANTAMARIA, CUARTAS y MANGADA.– Diccionario de incorrecciones y particularidades del lenguaje (4ª edición actualizada).
SANTANO.– Diccionario de gentilicios y topónimos.

Magallanes, 25.—Madrid-15.